COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 AVRIL 1899,

PRÉSIDENCE DE M. VAN TIEGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'interprétation d'un nombre restreint d'observations*. Note de M. Hatt.

« Dans le numéro des *Comptes rendus* du 13 mars, M. Vallier a proposé une règle, dispensant de recourir *à l'élimination d'une mesure* qui s'écarte notablement d'une série d'autres mesures concordantes de la même grandeur. Cette règle consiste à appliquer à la moyenne générale des valeurs obtenues une correction dont l'expression est

$$-\frac{1}{2}\frac{s_3}{s_2},$$

s_2 et s_3 désignant les sommes algébriques des carrés et des cubes des différences entre les observations isolées et leurs moyennes.

» Un cas particulier qui, théoriquement, répond aux conditions du problème, est celui de $n-1$ mesures M, égales entre elles, auxquelles vient se joindre une mesure p notablement plus grande que M.

» La moyenne générale P a pour expression

$$P = M + \frac{p-M}{n}$$

et l'on obtiendra pour s_2 et s_3 les valeurs

$$s_2 = \frac{(p-M)^2(n-1)}{n},$$

$$s_3 = \frac{(p-M)^3(n-1)(n-2)}{n^2},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{s_3}{s_2} = \frac{(p-M)(n-2)}{2n}.$$

» Il suffit donc que n soit supérieur à 4 pour que la valeur de cette expression soit supérieure à celle de $\frac{p-M}{n}$ et que, par suite, la moyenne corrigée descende au-dessous de M. L'impossibilité manifeste d'un pareil résultat fait naître des doutes sur la convenance de la règle proposée.

» On objectera peut-être que, dans l'exemple cité, les mesures sont arbitrairement choisies et ne satisfont pas aux conditions imposées par la loi des erreurs d'observation aux quantités mesurées. L'objection serait sérieuse si la valeur de n était très grande; mais comme il s'agit expressément d'un nombre restreint d'observations, on peut affirmer que l'hypothèse faite n'a rien d'invraisemblable.

» Dans le même ordre d'idées, il nous semble que l'assimilation admise par M. Vallier entre les quantités $\frac{h^2}{n}$ et $\frac{1}{s^2}$ est critiquable.

» s_2 est la somme des carrés des écarts à partir de la moyenne, sa valeur effective est déterminée par le petit nombre d'observations que l'on possède; tandis que h^2, inverse de l'écart moyen quadratique, est une quantité que l'on est censé connaître *a priori* et qui de toute façon ne peut être déterminée qu'au moyen d'un très grand nombre d'observations. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur les applications de l'aluminium.* Note de M. **Henri Moissan.**

« J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les différentes Notes de notre confrère M. Ditte [1] sur les propriétés de l'aluminium, sur la façon dont ce métal se comporte en présence des solutions de chlorure de sodium et d'acide acétique, et sur ce fait que sa chaleur considérable d'oxydation le rend attaquable par un très grand nombre d'agents chimiques.

» Cependant, sur divers points, nous différons d'avis; je voudrais préciser ces points et donner mon opinion sur ce sujet.

» Je ne critique en rien, bien entendu, les expériences de M. Ditte, mais je ne partage pas ses idées à propos des conclusions qu'il en tire au point de vue des applications de l'aluminium.

» Tout d'abord je me permettrai de faire une observation générale. Toutes les expériences de notre confrère n'ont pas été faites sur un métal ou des alliages dont la composition ait été déterminée d'une façon rigoureuse. Dans son étude, M. Ditte ne tient pas compte des impuretés de l'aluminium; il semble ne pas y attacher d'importance. Pour lui, les causes déterminantes d'attaque du métal ou des alliages sont dues aux seules propriétés particulières du corps simple aluminium. Il dit bien, il est vrai, au début de sa Note, qu'il a examiné deux tôles d'aluminium qui renferment pour 100 de 0,29 à 0,37 de fer et de 0,37 à 0,54 de silicium : ces analyses ayant été faites au Comité d'artillerie, sous la direction de M. le capitaine Ducru.

» J'aurais préféré, pour ma part, voir confirmer ces chiffres par des analyses personnelles de M. Ditte. D'autant plus que notre confrère signale, dans sa Note, des expériences faites sur l'aluminium, sur des alliages aluminium-cuivre, sur des fragments des voitures-citernes employées à Madagascar et sur d'autres fragments de gamelles mises en réforme après cette même campagne.

» Or ces derniers alliages d'aluminium sont différents des alliages employés aujourd'hui. J'ai déjà eu l'honneur d'appeler l'attention de l'Académie sur les variations profondes que présentent les échantillons d'alumi-

---

[1] Ditte, *Sur les propriétés et les applications de l'aluminium* (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 193, 195; 1899 et t. CXXVII, p. 919; 1898).

nium industriel impurs ou à peu près purs ([1]). Je puis assurer à M. Ditte que l'aluminium qui renferme des traces de sodium ou de carbone s'altère beaucoup plus rapidement que l'aluminium préparé en ces derniers temps. D'ailleurs, c'est à la présence d'une petite quantité de métal alcalin que l'aluminium, découvert par Wœhler, devait de différer comme propriétés de l'aluminium de Sainte-Claire Deville.

» Je crois faire un acte de justice en rappelant que c'est en particulier à la Commission militaire de l'aluminium et au zèle et à l'activité de M. l'intendant Darolles que nous devons d'être arrivés en France à faire produire aux deux usines d'aluminium de M. Héroult et de M. Secrétan un métal de plus en plus pur. Je dois reconnaître aussi que ces industriels ont fait le possible pour nous satisfaire et que les progrès de leur fabrication ont été continus et très réels.

» Pour bien faire comprendre la différence profonde qui existe entre l'aluminium produit en 1893 et l'aluminium d'aujourd'hui, je citerai les analyses suivantes, choisies parmi les centaines d'analyses qui ont été faites dans mon laboratoire pour l'étude de cette question ([2]).

Analyses d'alliages d'aluminium faites en août et septembre 1893.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Cuivre	5,85	5,60	2,62	2,27	1,20	6,35	5,99
Silicium	1,27	1,43	1,56	1,50	1,58	1,64	0,93
Fer	0,41	0,32	1,53	1,59	1,15	1,66	1,13
Aluminium ...	92,78	92,85	94,52	94,77	96,33	90,55	92,07
	100,31	100,20	100,23	100,13	100,26	100,20	100,12

Analyses d'aluminium et d'alliages d'aluminium faites en novembre 1897.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Cuivre	3,02	traces	traces	3,01	3,02	2,90
Silicium	0,04	0,05	0,08	0,09	0,02	0,13
Fer	0,20	0,19	0,32	0,12	0,20	0,12
Aluminium ..	97,01	99,80	99,18	97,02	96,74	97,04
	100,27	100,04	99,58	100,24	99,98	100,19

([1]) H. Moissan, *Impuretés de l'aluminium industriel* (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 12; 1894).

([2]) H. Moissan, *Analyse de l'aluminium et de ses alliages* (*Comptes rendus*, t. CXXI, p. 851; 1895).

» Cette pureté de l'aluminium actuel a été due, en partie, aux perfectionnements que M. Secrétan a apportés au procédé Hall.

» Quoi qu'il en soit, l'aluminium employé pour les objets d'équipement de Madagascar ne doit pas, selon moi, être comparé à l'aluminium pur ou à peu près pur que l'on obtient aujourd'hui. J'ajouterai que, bien que M. Ditte ne semble pas attacher un rôle important aux impuretés de ce métal, j'ai toujours vu l'aluminium impur s'attaquer et se piquer beaucoup plus vite que l'aluminium pur.

» Je tiens à faire remarquer que je n'ai pas étudié le métal des voitures-citernes employées à Madagascar et que, *a priori*, ces voitures, étant données les propriétés de l'aluminium, devaient fournir de mauvais résultats, la caisse d'aluminium étant placée sur des montants en fer. J'ai déjà signalé l'action électrolytique qui se produit au contact de l'aluminium et d'un autre métal, ou même au milieu d'une plaque d'aluminium hétérogène ([1]). M. Ditte, dans sa dernière Note, insiste avec beaucoup de raison sur ces conditions.

» Il n'en est pas de même pour les gamelles, marmites, bidons et quarts employés dans la campagne de Madagascar, bien que cet aluminium ne fût pas encore très pur. M. le capitaine Ducru a remis à M. Ditte quelques objets en aluminium en mauvais état, revenant de Madagascar. Il existe d'autres objets de petit équipement en aluminium qui, après avoir fait la campagne, sont revenus en bon état. On ne peut tirer, du reste, aucune conclusion d'objets en aluminium réformés, dont on ne connaît pas l'histoire, et qui peuvent avoir été plus ou moins malmenés, qui peuvent, par exemple, avoir été ramenés en France, à fond de cale, au contact de l'eau de mer. Ce que je puis certifier à M. Ditte, c'est que la plupart des gamelles qui sont revenues sur le sac de nos soldats étaient en bon état. J'ai l'honneur de présenter à l'Académie un certain nombre de ces objets, gardés en magasin depuis trois années. Ils sont bossués, noircis, mais ils ne sont pas percés.

» Enfin, M. le général Dumont, Président de la Commission de l'aluminium, après approbation de M. le Ministre de la Guerre, m'a autorisé à apporter, devant l'Académie, des extraits de quelques rapports des Chefs de Corps de Madagascar :

» 200e *d'Infanterie.* — La substitution des objets en aluminium à ceux en fer-blanc

---

([1]) H. Moissan, *Sur la présence du sodium dans l'aluminium préparé par électrolyse* (*Comptes rendus*, t. CXXI, p. 794; 1895).

constitue un grand progrès. Ces objets de campement sont plus propres, plus légers, se détériorent moins.

» *Régiment d'Algérie*, 1er *bataillon*. — Ce matériel est absolument supérieur à l'ancien au point de vue de la légèreté, de la propreté, de la résistance et de l'absence d'oxydation.

» *Régiment d'Algérie*. — Les marmites et gamelles ont été employées journellement depuis le début de la campagne et cependant aucun de ces objets n'a été signalé comme troué par usure ou par le feu, accidents qui n'auraient pas manqué de se produire avec des ustensiles en fer battu. Et plus loin : Plus de rouille comme avec les objets de campement dont l'étamage disparaît si rapidement; partant plus d'ustensiles troués; plus de mauvais goût des petits bidons.

» 1er *chasseurs d'Afrique*, 10e *escadron*. — Les ustensiles en aluminium, en outre de leur légèreté, offrent le sérieux avantage d'être fabriqués d'une seule pièce et par conséquent de ne point présenter les soudures par lesquelles, le plus souvent, se produisent les détériorations et les mises hors d'usage, en particulier, pour les bidons individuels.

» 13e *régiment d'infanterie de marine*, 2e *brigade*. — Les ustensiles en service au régiment sont en bon état après quatre mois de colonne et continuent à être employés, alors que l'ancien campement est mis généralement hors d'usage au bout de trois mois au maximum. L'entretien des ustensiles est très facile. On rend rapidement au métal son extérieur poli et brillant en le frottant avec un linge. L'ancien campement, au contraire, ne tardait pas à être noirci, son nettoyage était laborieux et l'on ne pouvait le rendre d'aspect convenable que par des étamages mensuels.

» 2e *régiment d'artillerie de marine*, 9e *batterie*. — Les avantages que le campement en aluminium présente sur l'ancien campement en fer battu sont de ne pas s'oxyder et d'être très léger; au point de vue de sa solidité, je crois qu'il offre au moins autant de résistance que l'ancien, seulement il se bosselle plus facilement.

» 13e *compagnie du génie*, 1re *brigade*. — L'emploi de l'aluminium présente de sérieux avantages principalement au point de vue de la légèreté et de l'entretien des ustensiles.

» *Artillerie de marine*, 8e *batterie de montagne*. — Les gamelles et marmites en aluminium pour quatre hommes, dont la batterie se sert depuis le commencement de la campagne, rendent de très bons services et ont l'avantage d'être beaucoup plus légères que les gamelles et marmites en fer battu. Les conditions de solidité paraissent être également remplies, car aucune dégradation n'a été constatée dans les ustensiles en service à la batterie.

» Si l'on veut d'ailleurs se rendre compte de la valeur des gamelles en aluminium, nous devons les étudier comparativement avec les objets similaires en fer étamé. Les objets en aluminium ont l'avantage d'être beaucoup plus légers que les objets en fer-blanc. Il nous semble très important de pouvoir diminuer de ce chef la charge du soldat de 800^{gr}, ou, dans un moment donné, de pouvoir remplacer cette différence de poids par un poids équivalent de cartouches. Nous ajouterons que ces gamelles, mar-

mites, quarts et bidons ont une autre qualité, celle de supprimer l'étamage, par conséquent d'éviter ces empoisonnements accidentels par le plomb, si bien étudiés par notre confrère M. Armand Gautier.

» De plus, ils présentent un troisième avantage. Comme l'aluminium ne peut pas se souder, tous ces objets de petit équipement sont fabriqués par estampage avec une seule feuille d'aluminium. Or c'est toujours par les soudures que commençait en campagne l'altération des bidons et des marmites.

» Dans une de ses expériences, M. Ditte porte son métal à une température voisine du rouge sombre et peu inférieure au point de fusion de l'aluminium. Puis il le trempe dans l'eau froide, ce qui provoque la formation de déchirures. Le fer étamé, dans les mêmes conditions, ne tarderait pas à être impropre à tout service. L'étamage et la soudure seraient fondus, car leurs points de fusion sont bien inférieurs à celui de l'aluminium ; le fer serait mis à nu, et la rouille aurait vite fait de mettre la gamelle hors de service.

» M. Ditte conclut de la façon suivante :

» En résumé, la connaissance des propriétés de l'aluminium et de ses alliages à faible teneur en cuivre permet de se rendre compte des détériorations que subissent, à la température ambiante, en France comme aux colonies, les vases fabriqués avec ces métaux.

» Je ne dois pas citer dans cette Note les résultats obtenus dans les nombreuses expériences que la Commission a organisées dans les compagnies de chasseurs alpins et dans différentes compagnies d'Algérie, qui ont utilisé d'une façon continue ces marmites et ces gamelles en aluminium. Mais M. Ditte me permettra de lui répondre par des expériences personnelles. Je demande pardon à l'Académie de lui citer des expériences d'ordre domestique.

» Depuis trois ans, toute ma cuisine est faite dans des casseroles en aluminium. Ces objets sont chauffés l'été sur le gaz, et l'hiver sur un feu de charbon de terre. Ces casseroles, qui ont passé par les mains de plusieurs domestiques, sont encore en parfait état de conservation, et je puis assurer à M. Ditte qu'elles ne gardent pas, dans leur intérieur, une couche de matières grasses « qui présente des inconvénients sérieux pour l'hy- » giène et la propreté ». Ces essais ont été répétés du reste par différentes personnes.

» J'ajouterai qu'un grand restaurant de Paris a employé pendant une année de semblables casseroles et qu'il n'a eu qu'à s'en louer.

» Il est certain qu'il se forme à la surface du métal une couche protectrice d'oxyde qui arrête et qui, dans certains cas, limite l'oxydation [1].

» Je sais très bien qu'il ne faut demander à l'aluminium que ce qu'il peut donner. C'est à tort que l'on a parlé de remplacer l'acier ou le laiton par l'aluminium. Certains néophytes trop zélés ont surfait ses propriétés mécaniques ainsi que sa résistance à l'oxydation et, en le baptisant pompeusement du nom de métal de l'avenir, ont été au-devant de nombreuses difficultés. A cet enthousiasme exagéré a succédé un dénigrement systématique. L'aluminium est devenu le métal de la déception. Il n'a mérité « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ».

» Chaque application de l'aluminium demande une étude spéciale longue et délicate; mais, parce que les difficultés se présentent, on ne doit pas d'emblée rejeter les applications possibles. Ce métal possède trois grandes qualités : légèreté, innocuité de son oxyde et facilité de travail par estampage. Je voudrais bien savoir si le fer est entré *de plano* dans nos habitudes. Lorsque ce métal était encore une curiosité, un chimiste de cette époque reculée aurait pu prédire qu'en comparaison du bronze, et à cause de sa facile oxydabilité, le fer n'aurait jamais d'emploi. Le fer, bien que très oxydable, a cependant rendu quelques services à l'humanité.

» Je suis loin de vouloir comparer l'aluminium au fer, mais j'estime que, pour des emplois spéciaux, nous verrons la consommation de l'aluminium augmenter de plus en plus.

» Pour moi, les conclusions du beau Mémoire d'Henri Sainte-Claire Deville, publié en 1855, sont toujours vraies. Ce grand savant a eu nettement la perception des services que ce métal pourrait rendre lorsqu'il serait devenu un métal usuel.

» Sa densité, si faible qu'elle égale à peine celle du verre, lui assure des applications spéciales. Intermédiaire entre les métaux communs et les métaux précieux, par

---

[1] Au contraire, une solution saline qui ne dissout pas l'alumine, le sel marin par exemple, ne peut avoir aucun effet sur l'aluminium, et, dès l'instant que l'enduit protecteur peut se produire, les choses se passent comme si l'aluminium ne pouvait décomposer l'eau dans les conditions de l'expérience; mais, on le voit, si cette décomposition n'a pas lieu, c'est en raison d'une cause purement accidentelle, c'est parce qu'il se forme dans ce cas, comme dans beaucoup d'autres, un enduit plus ou moins imperméable, qui, s'opposant au contact du métal avec les liquides qui l'environnent, ralentit considérablement les réactions et peut même les empêcher tout à fait de se produire (Ditte, *Comptes rendus*, t. CX, p. 784; 1890).

certaines de ses propriétés, il est supérieur aux premiers dans les usages de la vie domestique par l'innocuité absolue de ses combinaisons, etc.

» Et, après avoir établi dans ce Mémoire avec quelle facilité le chlorure double d'aluminium et de sodium s'électrolyse en fournissant ce métal, Deville ajoute cette phrase prophétique :

» On doit désirer que l'aluminium soit tôt ou tard introduit dans l'industrie. Il suffira, sans doute, de modifier fort peu les procédés que j'ai décrits pour les rendre applicables à la production économique de l'aluminium.

» La découverte de Deville n'avait plus qu'à attendre, pour devenir industrielle, la découverte de Gramme.

» Après m'être occupé pendant plusieurs années des applications si diverses que l'aluminium peut donner à l'armée et à l'industrie moderne, je suis resté fidèle aux conclusions d'Henri Sainte-Claire Deville. »

ÉLECTRICITÉ. — *Production de forces électromotrices par le déplacement dans le sein d'un liquide soumis à l'action magnétique de masses de conductivités différentes.* Note de M. R. **Blondlot**.

« Une cuve en verre, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, a une largeur OX égale à $0^m,18$, une épaisseur OY égale à $0^m,12$, et une hauteur OZ égale à $0^m,23$. On a d'abord versé au fond de cette cuve, jusqu'à une hauteur de $0^m,03$ environ, une solution concentrée de sulfate de zinc, puis on a achevé de la remplir avec une solution très diluée du même sel, en empêchant autant que possible le mélange des deux solutions. Dans chacune des deux faces de la cuve, qui sont normales à OX, est percée une ouverture, élevée de $0^m,04$ au-dessus du fond, et dans laquelle est mastiqué un tube de verre recourbé vers le bas et fermé par un diaphragme de papier parchemin : ces deux tubes se remplissent de liquide en même temps que la cuve; chacun d'eux plonge dans un verre où plonge aussi une électrode de zinc amalgamé; les deux verres contiennent une même solution de sulfate de zinc, et les deux électrodes sont reliées aux bornes d'un électromètre capillaire.

» La cuve est installée dans le champ d'un électro-aimant de façon que les lignes de force les traversent suivant les directions OY, c'est-à-dire normalement à son épaisseur; les pièces polaires de l'électro-aimant sont

formées de deux longs plateaux, de sorte que le champ est sensiblement uniforme.

» L'appareil ainsi disposé, les deux électrodes sont au même potentiel, ce qui résulte de la symétrie du système. Maintenant, à l'aide d'une mince lame d'ébonite fixée comme la barre d'un T à un manche de même substance, agitons le contenu de la cuve de manière à mélanger les deux solutions de concentrations différentes, sans que toutefois l'agitation atteigne la surface libre du liquide : aussitôt une déviation de l'électromètre se produit, indiquant qu'une différence de potentiel a pris naissance entre les électrodes; si l'on suspend l'acte du mélange, la déviation disparaît, puis elle reparaît si l'on fait de nouveau fonctionner l'agitateur. La déviation change de sens si l'on renverse le champ magnétiqne, et s'annule en même temps que lui. Le sens de la différence de potentiel est donné par la règle suivante : un personnage étant couché dans la cuve, sur le flanc droit, et le visage tourné vers le pôle austral de l'aimant, l'électrode positive est du côté de sa tête. J'ai vérifié que l'agitation ne produit plus aucune déviation une fois que, le mélange étant achevé, le contenu de la cuve est devenu homogène.

» Faisons maintenant l'analyse du phénomène :

» A l'aide de plans parallèles aux faces de la cuve, divisons l'espace contenu dans celle-ci en parallélépipèdes infiniment petits dx, dy, dz, égaux entre eux. Considérons une section quelconque du liquide par un plan horizontal; soit $dx\,dy$ un élément quelconque de cette section, et soit υ la composante verticale estimée de bas en haut de la vitesse du liquide en un point de cet élément. Comme, malgré l'agitation, le liquide occupe toujours la même portion de l'espace, le volume total de liquide qui traverse la section de bas en haut est nul, et l'on a constamment

$$\int\int \upsilon\,dx\,dy = 0.$$

Toutefois, $\int \upsilon\,dx$ ne sera pas nul en général, mais aura des valeurs positives pour certaines valeurs de y, des valeurs négatives pour d'autres, de telle sorte que la somme $\int dy \int \upsilon\,dx$ soit nulle.

» Considérons maintenant une couche de liquide comprise entre deux sections horizontales distantes de dz. Soit $dx\,dy\,dz$ l'un des éléments de volume de cette couche; d'après les lois de l'induction, la composante parallèle à OX du flux d'électricité produit dans cet élément par l'induction seule, indépendamment de toute action électrostatique, est, en désignant

par H l'intensité du champ magnétique estimée suivant OY, égale au quotient de Hυ dx par la résistance de l'élément.

» Cette résistance est, en désignant par λ la conductivité du liquide, $\frac{dx}{\lambda\, dy\, dz}$, et, par suite, la composante du flux peut s'écrire $\mathrm{H}\frac{dz}{dx}\lambda\upsilon\, dx\, dy$. Je vais montrer que la somme des quantités analogues, étendue à tous les éléments de la couche, a le même signe que H. Comme dx et dz sont constants et positifs, il suffit de montrer que l'intégrale $\int\!\!\int \lambda\upsilon\, dx\, dy$, étendue à toute la section a une valeur positive; pour cela, remarquons d'abord que, puisque l'agitation a pour résultat de rendre le liquide plus homogène, il s'ensuit que les portions qui montent sont, *en moyenne,* plus concentrées que celles qui descendent, et que, par suite, pour les éléments où υ est positif, λ est, en moyenne, plus grand que pour ceux où υ est négatif.

» Maintenant, pour passer de l'intégrale $\int\!\!\int \upsilon\, dx\, dy$ à celle dont nous nous occupons actuellement, il faudra en multiplier les différents éléments par les valeurs correspondantes de λ : les éléments positifs seront ainsi multipliés par des facteurs plus grands, *en moyenne,* que ceux par lesquels seront multipliés les éléments négatifs, et, par suite, le total, qui était nul, deviendra positif.

» Il s'ensuit que la somme qui, étendue au volume total de la cuve, représente le flux total d'électricité produit par l'induction exclusivement, à travers tout le liquide, parallèlement à OX, a une valeur positive si H est positif; en d'autres termes, l'induction tend à produire un déplacement d'électricité positive vers les X positifs, et d'électricité négative dans le sens opposé. Au début de l'agitation du liquide, ces déplacements ont lieu sans obstacle, puis l'accumulation des charges qui en résulte donne naissance à des forces électriques, opposées aux forces électromotrices d'induction, et qui en diminuent les effets dans le sein du liquide. Ces mêmes charges, d'autre part, élèvent le potentiel vers l'une des électrodes et le diminuent vers l'autre. Telle est la cause des déviations observées à l'électromètre.

» Le phénomène obéit à une loi analogue à la loi de Lenz : il est en effet aisé de voir que, si l'on réunit les électrodes par un fil conducteur, le courant qui prend naissance par l'agitation, ayant une densité plus grande dans les portions les plus conductrices du liquide, l'action électromagnétique qui en résulte s'oppose au mélange.

» Le phénomène décrit précédemment doit certainement se produire

dans le sein de la mer et, en particulier, en aval de l'embouchure des fleuves, par le mélange d'eaux de salures différentes dans le champ magnétique terrestre; on peut même penser qu'il acquiert, dans ces conditions, une intensité notable, en raison de l'étendue considérable du milieu qui en est le siège.

» Si, au lieu de mélanger artificiellement les deux liquides, on les laissait se diffuser spontanément l'un dans l'autre dans le champ magnétique, obtiendrait-on encore des forces électromotrices transversales? Cela peut paraître probable, bien que la théorie exposée plus haut ne puisse être appliquée en toute rigueur à ce cas, puisqu'il n'est pas certain que la diffraction soit assimilable à une sorte de limite du mélange. Le phénomène serait probablement trop petit pour être observable. »

PHYSIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *De l'action favorisante exercée par le pancréas sur la fermentation alcoolique.* Note de MM. **R. Lépine** et **Martz**, transmise par M. d'Arsonval.

« Nous prenons des ballons renfermant 200^{cc} de liquide minéral de Pasteur, peu sucré, et 1^{gr} de levure de bière. A certains de ces ballons nous ajoutons un poids de pancréas qui est le même dans chaque expérience. Nous laissons la fermentation se faire pendant quelques heures; puis nous dosons, avec la liqueur de Fehling, le sucre restant dans chaque ballon, et, par pesée, l'acide carbonique dégagé par chacun d'eux.

» *Expérience I.* — On enlève à un chien sain un fragment de pancréas du poids de 8^{gr}; on le jette et on le laisse cinq minutes dans l'eau bouillante, pour détruire la trypsine; puis on prend le faisceau de nerfs qui entoure l'artère pancréaticoduodénale, et on le faradise pendant un quart d'heure. On referme le ventre, et, cinq heures plus tard, on extirpe un fragment de même poids de ce pancréas, qu'on jette également dans l'eau bouillante. Les fragments broyés sont introduits dans deux ballons; l'un, N, reçoit le fragment normal; l'autre, E, le fragment excité.

» Durée de la fermentation : quinze heures à 30° C.

	N.	E.
Sucre avant la fermentation	4,40	4,40
Sucre après la fermentation	0,92	0,47
Sucre disparu	3,48	3,93
CO^2 pesé	0,70	1,01
CO^2 dégagé pour 1^{gr} de sucre disparu	0,201	0,257

» Ainsi, dans le ballon E, la destruction du sucre a été plus grande (ce qui est

d'accord avec le fait signalé par l'un de nous, il y a quelques années, que la glycolyse est beaucoup plus forte dans le sang d'un chien dont les nerfs pancréatiques ont été excités quelques heures auparavant). De plus, pour 1gr de sucre disparu, il y a eu davantage d'acide carbonique dégagé.

» *Expérience II.* — Répétition de l'expérience précédente, sauf que chaque morceau de pancréas est de 12gr, et que la durée de la fermentation est de une heure et demie à 35° C.

	N.	E.
Sucre avant la fermentation	3,25	3,25
Sucre après la fermentation	1,86	1,80
Sucre disparu	1,39	1,45
CO^2 pesé	0,19	0,22
CO^2 dégagé pour 1gr de sucre disparu	0,146	0,157

» Ainsi, mêmes résultats que précédemment, quant au sucre disparu, et quant à CO^2 dégagé par gramme de sucre détruit.

» Nous possédons plusieurs expériences tout à fait semblables, quelques-unes avec des ballons témoins (sans pancréas). Or, dans ces derniers, la perte de sucre et la production de CO^2 sont moindres non seulement que dans les ballons E, mais aussi que dans les ballons N. Il est donc positif que le pancréas normal bouilli, comme toute matière albuminoïde, exerce une action favorable à la fermentation alcoolique, et le pancréas excité, une influence plus grande encore. Nous l'attribuons surtout, sinon exclusivement, aux peptones. En effet, dans les pancréas dont les nerfs ont été excités il y a beaucoup de peptones.

» Si l'on partage un pancréas frais en deux moitiés, qu'on jette la première dans l'eau bouillante et qu'avant de procéder de la même façon avec la seconde on la laisse macérer une demi-heure, *au plus,* dans de l'eau à 40° C., cette seconde moitié renferme beaucoup de peptones et se comporte vis-à-vis de la levure comme si ses nerfs avaient été excités; mais, si la chauffe à 45° C. est un peu prolongée, il y a moins de sucre détruit.

» C'est ce que montre l'expérience suivante faite avec trois ballons renfermant chacun 6gr de pancréas : E contient le fragment simplement bouilli, EC et EC′ ceux qui ont été préalablement chauffés à 45° C., à savoir EC une demi-heure et EC′ pendant deux heures.

» *Expérience III.* — Durée de la fermentation : deux heures à 35° C.

	E.	EC.	EC′.
Sucre avant	2,72	2,72	2,72
» après	2,14	2,04	2,30
» disparu	0,58	0,68	0,42
CO^2 pesé	0,225	0,305	0,240
CO^2 pour 1gr	0,387	0,448	0,571

» Les nerfs du pancréas auquel ont été empruntés les trois fragments avaient été préalablement excités. Comme dans le ballon EC, renfermant le fragment chauffé une demi-heure, la destruction du sucre et la formation d'acide carbonique sont plus fortes qu'en E, on devra conclure qu'un chauffage *modéré* ajoute encore à l'influence favorisante d'un pancréas préalablement excité. Dans le ballon EC′, la destruction du sucre est moindre qu'en EC et même qu'en E. Mais, pour 1^{gr} de sucre disparu, la quantité de CO^2 est plus forte.

» Même résultat dans l'expérience suivante, faite avec trois ballons dont un, T, témoin, ne reçoit pas de pancréas; un autre, N, contient un fragment de pancréas normal bouilli, et un autre, NC, un fragment du même pancréas préalablement chauffé une demi-heure à 45° C.

» *Expérience IV*. — Durée de la fermentation : trois heures à 35° C.

	T.	N.	NC.
Sucre avant..........	3,49	3,49	3,49
Sucre après..........	0,96	0,78	0,892
Sucre disparu........	2,53	2,71	2,598
CO^2 pesé...........	0,215	0,370	0,435
CO^2 pour 1^{gr} de sucre..	0,085	0,136	0,167

» Ainsi, dans ce cas, le chauffage du pancréas, pendant une demi-heure seulement, a produit une *altération* de l'organe, grâce à laquelle la quantité de CO^2 dégagé par 1^{gr} de sucre a *augmenté*, tandis que la destruction du sucre a été *moindre*, sinon que dans le ballon T, au moins que dans le ballon N.

» Si l'on expérimente avec des pancréas ayant séjourné quelque temps à la température du laboratoire, et, *a fortiori*, avec des pancréas non bouillis, qui s'altèrent profondément pendant la durée de la fermentation, et dont la trypsine attaque la levure, on peut avoir des résultats contradictoires. Il faut donc opérer avec des pancréas frais et bouillis. »

CORRESPONDANCE.

M. **Armand Gautier** présente à l'Académie en son nom et au nom de M. *J. Albahary*, son collaborateur, un Volume ayant pour titre : « Cent vingt exercices de Chimie pratique ».

Ce petit Ouvrage a pour but de former ceux qui ont déjà quelque habitude du laboratoire au métier de chimiste praticien. Il donne, d'après un ordre logique et gradué, cent vingt exercices tous *décrits avec détail d'après*

les textes originaux auxquels il renvoie toujours et assez précis pour que l'élève puisse les exécuter sans maître. Leur choix est tel qu'il permet d'aborder successivement les sujets importants, les plus délicats et les plus actuels de la Chimie minérale, organique et biologique.

En le suivant pas à pas, un bon étudiant peut prendre en une seule année une idée assez complète des principales synthèses de la Chimie, organique ou minérale, des et méthodes qu'elle met en œuvre.

ASTRONOMIE. — *Application du* criterium de Tisserand *aux petites planètes.* Note de M. **Jean Mascart**, présentée par M. Lœwy.

« Les éléments elliptiques d'une comète peuvent éprouver des variations considérables sous l'influence des perturbations d'une grosse planète telle que Jupiter, et, après avoir observé deux comètes à éléments différents, il faut des calculs longs et souvent inutiles avant de reconnaître si l'on est en présence d'une seule et même comète, troublée en réalité par l'action de Jupiter. Il était précieux de pouvoir décider, *a priori*, si deux systèmes d'éléments peuvent ou ne peuvent pas correspondre à un même astre, et c'est ce qu'a recherché Tisserand pour le problème suivant : *Un astre* P, *de masse évanouissante, est troublée par une planète* P' *qui décrit un cercle de rayon a' autour du Soleil.*

» Si l'on désigne par a, p, i le demi grand axe, le paramètre et l'inclinaison de l'orbite troublée par rapport au plan de l'orbite planétaire, Jupiter par exemple, et que l'on fasse application de l'intégrale de Jacobi, on trouve, avant et après l'entrée de l'astre dans la sphère d'activité,

$$\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{p}\cos i}{a'^{\frac{3}{2}}} = \alpha = \text{const.}$$

» Tel est le beau criterium de Tisserand ([1]), sous forme de condition nécessaire d'identité, origine des remarquables travaux sur la capture des comètes dans le système solaire. On peut en étendre encore la portée en supposant que l'orbite de Jupiter n'est pas circulaire, mais qu'elle se rapproche d'un cercle au moment des grandes perturbations, soit que la planète se trouve vers son aphélie ou vers son périhélie; on peut aussi, avec M. Callandreau ([2]), tenir compte de l'excentricité de Jupiter. Enfin,

([1]) *Bulletin astronomique,* t. VI, p. 289.

([2]) *Annales de l'Observatoire,* Mém., t. XX.

dans cet ordre d'idées, les travaux de M. Schulhof ([1]) font autorité : l'auteur a montré qu'il y avait, dans le cas des perturbations, trois relations entre les anciens éléments et les nouveaux, dont deux approximatives seulement, tandis que la troisième est presque rigoureusement exacte et résulte du criterium de Tisserand.

» Les planètes, à proprement parler, n'entrent pas dans la sphère d'activité de Jupiter, et la constante de Tisserand n'a pas, pour elles, d'existence physique aussi capitale; néanmoins, si les liens entre les comètes et Jupiter sont généralement acceptés, il ne paraît pas douteux également que cette planète influe sur la distribution des astéroïdes et l'on a, dans ce cas, l'avantage de pouvoir entièrement négliger l'excentricité de Jupiter dont les perturbations se sont présentées, successivement, pour toutes les positions sur l'orbite.

» Après avoir rapporté 417 petites planètes au plan de Jupiter, pour 1850,0, nous avons donc pensé qu'il pouvait être utile de calculer les valeurs correspondantes de la constante α; on trouve ainsi des valeurs comprises entre 0,567 et 0,708 tandis que, pour les comètes, on obtient l'intervalle 0,475 à 0,580. Lorsque, jusqu'ici, pour deux comètes différentes, on trouvait des valeurs de α concordantes au millième, on était tenté de conclure à leur identité; pour les planètes, nous sommes en présence de coïncidences bien plus singulières encore, à six décimales communes. Nous en signalons plus loin quelques-unes d'intéressantes, et nous ferons remarquer à cette occasion que la coïncidence est encore plus parfaite que celle trouvée pour les demi grands axes ([2]).

	a.
(2)	2,767972
(215)	2,767948

» On peut également observer quelques groupements singuliers, en ce qui concerne la différence des longitudes $\varpi - \Omega$; les distances périhélies des astéroïdes paraissent tout d'abord arbitraires tandis que les distances aphélies, comprises entre 2,3 et 4,8, se concentrent fortement vers 3,3. Nous aurons l'occasion de revenir, pour les planètes, sur le rôle des aphélies, les coïncidences et les propriétés entre les quantités α, $\varpi - \Omega$, les points de proximité maxima des orbites et nous dirons seulement que, si l'on range les planètes par α croissants, il y a distribution très nette des grands axes et des distances aphélies, tandis que les autres éléments paraissent éprouver une influence secondaire.

» La plus grande distance aphélie, 4,772, rapproche beaucoup la planète (361) de

---

([1]) *Bulletin astronomique*, t. VIII, p. 147, 191, 225.

([2]) *Ann. de l'Observatoire*, Mém., t. XXIII.

l'orbite de Jupiter, tandis qu'à l'autre bord de l'anneau c'est l'influence de Mars qui peut devenir prépondérante; plusieurs planètes, en effet, s'approchent du Soleil plus que Mars (sans compter celles dont les orbites sont entièrement intérieures), principalement (323) Brucia, découverte par M. Max Wolf, et dont la distance périhélie est 1,564, tandis que la distance aphélie de Mars est égale à 1,666.

» Dans les coïncidences que nous mentionnons ici, A et B figurent respectivement les distances aphélies et périhélies ([1]).

	a.	*e*.	A.	B.	*i*.	α.	☊.	ϖ.	ϖ − ☊.
(372).	3,144	0,271	3,997	2,291	24.35	0,579564	»	»	»
(153).	3,954	0,164	4,603	3,305	8.45	0,579567	»	»	»
(87).	3,483	0,092	3,804	3,162	9.44	0,595704	»	»	261°
(276).	3,118	0,063	3,315	2,921	22.10	0,595707	»	»	267
(250).	3,152	0,130	3,563	2,742	12.35	0,606706	»	»	»
(294).	3,133	0,250	3,917	2,348	5.16	0,606710	»	»	»
(411).	2,894	0,235	3,575	2,213	18. 9	0,610245	»	»	»
(252).	3,155	0,084	3,419	2,891	10.25	0,610254	»	»	»
(90).	3,148	0,164	3,665	2,630	1.16	0,612487	»	»	»
(316).	3,175	0,131	3,593	2,758	1.17	0,612489	»	»	»
(171).	3,144	0,115	3,506	2,782	1.15	0,614750	»	»	»
(303).	3,123	0,066	3,329	2,917	7.32	0,614758	»	»	»
(360).	3,003	0,169	3,510	2,496	10.35	0,615886	125	45	»
(52).	3,095	0,110	3,436	2,755	6.21	0,615890	123	94	»
(48).	3,115	0,061	3,305	2,924	6.32	0,615937	»	»	»
(393).	2,773	0,329	3,686	1,860	15.29	0,615938	»	»	»
(241).	3,053	0,100	3,358	2,748	6.49	0,618409	261	329	»
(156).	3,013	0,103	3,323	2,704	9.57	0.618413	135	319	»
(221).	2,806	0,218	3,417	2,195	12.7	0,625722	»	»	200
(191).	2,897	0,088	3,151	2,643	10.54	0,625723	»	»	218
(81).	2,854	0,210	3,453	2,255	8.11	0,625879	»	»	»
(416).	3,038	0,264	3,839	2,237	8.36	0,625879	»	»	»
(417).	2,803	0,129	3,166	2,440	6.53	0,634444	»	»	»
(295).	2,799	0,169	3,271	2,327	3.59	0,634446	»	»	»
(82).	2,762	0,223	3,377	2,147	2.45	0,634726	»	»	»
(167).	2,853	0,034	2,950	2,756	2.4	0,634731	»	»	»

([1]) Nous ne donnons, pour simplifier, que trois décimales des nombres calculés, tous, à six décimales.

	a.	e.	A.	B.	i.	α.	☊.	ϖ.	ϖ — ☊.
(351).	2,766	0,155	3,195	2,338	7°.52′	0,635736	»	»	»
(39).	2,768	0,114	3,084	2,452	9.44	0,635745	»	»	»
(275).	2,770	0,164	3,224	2,316	3.45	0,637079	»	»	20°
(55).	2,760	0,143	3,155	2,366	7.19	0,637081	»	»	10
(45).	2,721	0,081	2,941	2,500	5.48	0,643148	»	»	»
(123).	2,695	0,123	3,027	2,363	7.35	0,643154	»	»	»
(292).	2,530	0,031	2,609	2,451	16.10	0,655012	»	»	»
(32).	2,587	0,083	2,797	2,377	6.16	0,655013	»	»	»
(138).	2,449	0,162	2,847	2,052	2.28	0,668250	»	299°	»
(135).	2,430	0,204	2,925	1,935	3. 6	0,668256	»	307	»
(30).	2,367	0,127	2,666	2,067	3.18	0,679217	»	»	»
(169).	2,358	0,131	2,667	2,048	5.59	0,679218	»	»	»
(281).	2,186	0,132	2,475	1,867	4.59	0,701506	»	»	»
(270).	2,198	0,150	2,527	1,868	3.36	0,701507	»	»	»

» En outre, ce criterium pourra être appliqué pour d'autres distances que celle de Jupiter au Soleil; les coïncidences correspondantes seraient plus ou moins nombreuses que celles que nous venons d'indiquer à moins d'une unité du cinquième ordre et l'on pourrait espérer, ainsi, avoir des renseignements sur la constitution primitive de cet anneau si varié. Existait-il, par exemple, dès l'origine, des groupements assez importants qui, comme les étoiles filantes, se sont lentement disséminés dans toute la couronne? Telle est l'importante question que nous nous efforcerons désormais d'élucider. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre.* Note de M. A. **Liapounoff**, présentée par M. E. Picard.

« Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu p(x) y = 0, \tag{1}$$

$p(x)$ désignant une fonction donnée d'une variable réelle x, continue et périodique à période ω, et μ un paramètre arbitraire dont la fonction $p(x)$ ne dépend point.

» Soit A la constante caractéristique de cette équation, c'est-à-dire la constante donnée par la formule

$$A = \tfrac{1}{2}[f(\omega) + \varphi'(\omega)],$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant les solutions de l'équation (1) définies par les conditions

initiales suivantes :

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0; \quad \varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=1.$$

» On sait que c'est de la nature de la constante A que dépend principalement le caractère des solutions de l'équation (1) dont l'intégrale générale, si l'on pose

$$\rho = A + \sqrt{A^2 - 1},$$

peut se présenter (du moins si $A^2 - 1$ n'est pas nul) sous la forme

$$y = C_1 F_1(x) \rho^{\frac{x}{\omega}} + C_2 F_2(x) \rho^{-\frac{x}{\omega}},$$

où $F_1(x)$, $F_2(x)$ désignent des fonctions périodiques de x à période ω et C_1, C_2 des constantes arbitraires.

» Pour l'équation considérée, A dépendra de μ et en sera, évidemment, une fonction entière. Dans une Note antérieure (*Comptes rendus,* t. CXXIII, 28 décembre 1896), j'ai publié quelques résultats relatifs à la série

$$A = 1 - A_1 \mu + A_2 \mu^2 - A_3 \mu^3 + \ldots$$

qui représente cette fonction. Maintenant j'ai l'intention de communiquer certaines propositions concernant les racines de l'équation

$$(2) \qquad A^2 - 1 = 0$$

et relatives au cas où $p(x)$ est une fonction réelle ne changeant jamais de signe. Pour fixer les idées, je supposerai $p(x) \geqq 0$.

» L'équation (2) admet une racine évidente $\mu = 0$, et cette racine est simple, puisque A_1, qui est donné par la formule

$$A_1 = \frac{\omega}{2} \int_0^{\omega} p(x)\, dx,$$

n'est pas nul. D'autre part, on s'assure aisément que, dans la supposition adoptée, cette équation ne peut admettre ni de racines imaginaires, ni de racines négatives. Il ne reste donc à considérer que des valeurs positives de μ, et j'ai reconnu que, parmi ces valeurs, il se trouve une infinité de racines qui, d'ailleurs, ne peuvent être que simples ou doubles.

» Ce résultat peut se rattacher à une proposition, due à M. Picard (*Traité d'Analyse,* t. III, p. 121), que l'on peut énoncer comme il suit :

» Quelle que soit la fonction réelle et continue $p(x)$ ne devenant jamais négative, et quels que soient les nombres réels a et b, entre lesquels cette

fonction n'est pas constamment nulle, il existe une suite indéfinie de nombres positifs

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \ldots$$

tels que, pour $\mu = \mu_i$, toute solution de l'équation (1), s'annulant pour $x = a$, s'annulera pour $x = b$ et encore pour $i - 1$ (et *seulement* pour $i - 1$) valeurs différentes de x, intermédiaires entre a et b [1].

» Il est à remarquer qu'on a toujours $\mu_i < \mu_{i+1}$ et que μ_i croît indéfiniment avec i.

» En appliquant cette importante proposition au cas où $p(x)$ est une fonction périodique à période ω et en supposant $b = a + \omega$, on parvient aux conclusions suivantes :

» Tous les μ_i sont des fonctions continues et périodiques de a à période ω. Ces fonctions peuvent parfois se réduire à des constantes (comme cela arrive toujours, si $p(x)$ est une constante). *Si cette circonstance se présente pour une valeur quelconque de i, le nombre correspondant μ_i sera une racine de l'équation* (2), *et cette racine sera double.* Si, au contraire, μ_i dépend de a, ce sera une fonction dont tous les minima seront égaux entre eux et dont tous les maxima seront dans le même cas. Alors, μ'_i étant la valeur commune des minima et μ''_i celle des maxima, *les nombres μ'_i et μ''_i seront encore des racines de l'équation* (2), *et ces racines seront simples.*

» Donc, si dans le cas de $\mu_i =$ const. on se sert encore des notations μ'_i, μ''_i (de sorte qu'on aura alors $\mu''_i = \mu'_i$), tous les termes de la suite

$$(3) \qquad 0, \; \mu'_1, \; \mu''_1, \; \mu'_2, \; \mu''_2, \; \mu'_3, \; \mu''_3, \; \ldots$$

seront des racines de l'équation (2), les racines doubles étant répétées deux fois. J'ajouterai que *cette suite comprend toutes les racines de l'équation* (2) et que ces racines y sont rangées dans l'ordre croissant, puisqu'on peut démontrer que l'on a toujours $\mu''_i < \mu'_{i+1}$. D'ailleurs, *les termes μ'_i, μ''_i à indice i impair sont des racines de l'équation*

$$A + 1 = 0,$$

et ceux à indice pair, des racines de l'équation

$$A - 1 = 0.$$

» Les nombres de la suite (3) étant exclus, on peut affirmer que, si μ

---

[1] En parlant des solutions de l'équation (1), nous supposons toujours que la solution évidente $y = 0$ est exclue.

se trouve dans l'un des intervalles (μ'_i, μ''_i), on aura $A^2 > 1$, et, par suite, toutes les solutions de l'équation (1) seront des fonctions illimitées de x. Si, au contraire, μ se trouve dans l'intervalle $(0, \mu'_1)$ ou bien dans l'un de ceux (μ''_i, μ'_{i+1}), on aura $A^2 < 1$, et les solutions de l'équation (1) seront toutes limitées.

» Enfin, si l'on a $\mu = \mu'_i$ ou $\mu = \mu''_i$, il existera, dans le cas de $\mu''_i > \mu'_i$, deux solutions indépendantes $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$, vérifiant les équations

$$\theta_1(x+\omega) = (-1)^i \theta_1(x),$$
$$\theta_2(x+\omega) = (-1)^i \theta_2(x) + \theta_1(x),$$

et dans le cas de $\mu''_i = \mu'_i$, il n'y aura que des solutions satisfaisant à l'équation

$$\theta(x+\omega) = (-1)^i \theta(x).$$

» Donc, dans le premier cas, l'équation (1) admettra des solutions limitées aussi bien que celles illimitées, et dans le second, elle n'admettra que des solutions limitées qui seront des fonctions périodiques de x à période 2ω. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Interprétation nouvelle de la condition requise pour qu'une intégrale double, prise sur une plaque de surface, ne dépende que du bord de celle-ci.* Note de M. **Ch. Méray**, présentée par M. Darboux.

« Dans un Mémoire intitulé : *Sur la théorie des intervalles binaires et des intégrales doubles,* qui est sous presse en ce moment pour être publié prochainement par les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* se trouve introduite une notion, auparavant inaperçue, qui me paraît éclaircir singulièrement la théorie des intégrales multiples. Pour une intégrale double

(1) $$\int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

c'est celle de l'*intégrale indéfinie binaire* de la fonction $f(x,y)$, à deux variables, en nommant ainsi la *paire de fonctions* qui a $f(x,y)$ pour déterminant différentiel. Par ses propriétés générales, cette paire de fonctions offre l'analogie la plus frappante et la plus intéressante avec l'intégrale indéfinie vulgaire $\int f(x)\,dx$ de la fonction $f(x)$ à une seule variable indépendante : elle est (à certains égards) *croissante* ou *décroissante* selon que

sa *dérivée binaire* $f(x, y)$ est positive ou négative; quand on l'a une fois obtenue, ce dont j'indique les moyens, il suffit encore, pour calculer la valeur de l'intégrale définie (1), de *prendre* simplement *cette paire entre les limites données,* opération dont le manuel dérive de certaines règles spéciales, etc.

» Je montrerai bientôt que les considérations de ce genre s'étendent d'elles-mêmes au cas où les fonctions en jeu dépendent de plus de deux variables; dès à présent, toutefois, il m'est facile d'en faire connaître brièvement l'application, selon moi très intéressante, qui sert de titre à cette Note.

» En appelant u, v une paire quelconque de fonctions de deux variables indépendantes p, q, et posant généralement

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dp} & \frac{du}{dq} \\ \frac{dv}{dp} & \frac{dv}{dq} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ p & q \end{pmatrix},$$

en considérant trois fonctions de p, q, savoir

$$(2) \qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad z = \psi(p, q),$$

toutes indéterminées sous la seule condition que le point *ternaire* (x, y, z) soit toujours déplacé sur un contour fixe $(\mathfrak{S})$ par le mouvement du point *binaire* (p, q) sur l'enceinte d'un intervalle *binaire franc*, $(\mathfrak{J})$, invariable aussi, l'expression

$$(3) \quad \int\!\!\int_{(\mathfrak{J})} \left[A(x, y, z) \begin{pmatrix} y & z \\ p & q \end{pmatrix} + B(x, y, z) \begin{pmatrix} z & x \\ q & q \end{pmatrix} + C(x, y, z) \begin{pmatrix} x & y \\ p & q \end{pmatrix} \right] dp\, dq$$

construite avec les fonctions composées $A(x, y, z), \ldots$ dont les composantes A, B, C sont données, expression qui, en posant généralement

$$\begin{pmatrix} u & v \\ p & q \end{pmatrix} dp\, dq = \partial(u, v),$$

pourrait encore être notée par

$$(4) \qquad \int\!\!\int_{(\mathfrak{J})} [A\, \partial(y, z) + B\, \partial(z, x) + C\, \partial(x, y)],$$

est l'intégrale double de la *différentielle binaire totale* écrite ci-dessus (4) entre crochets, prise sur la *plaque* de la surface représentée par les équations (2) qui a le contour $(\mathfrak{S})$ pour *bord;* et, pour que la valeur de cette intégrale dépende, non de la forme de cette plaque, mais seulement de la

nature de son bord, on sait (*Cf.* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 110 et suiv.) qu'il est nécessaire et suffisant d'avoir entre les composantes A, B, C, et cela quelles que soient x, y, z considérées en ceci comme trois variables indépendantes, la relation

$$(5) \qquad \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

» Dans l'occasion prochaine à laquelle je faisais allusion tout à l'heure, je donnerai, de cette identité, une démonstration nouvelle, reproduisant tout à fait par son tour et par son caractère quasi-intuitif celle de l'identité analogue $\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0$ que l'on rencontre dans la théorie de l'intégrale simple $\int (X\,dx + Y\,dy)$, prise sur un arc de courbe. Pour le moment, je veux montrer seulement qu'elle constitue, comme cette dernière, une *condition d'intégrabilité* exprimant que la différentielle binaire totale, incluse entre crochets dans l'expression (4), est *exacte*, c'est-à-dire, en termes plus précis, qu'il existe quelque paire (u, v) de composantes à trois places donnant une paire de fonctions composées $[u(x, y, z), v(x, y, z)]$ dont le déterminant différentiel par rapport au couple (p, q) reproduise, quelles que soient les fonctions simples (2), la fonction composée différentielle figurant entre crochets dans l'intégrale (3), ou bien encore, car cela revient évidemment au même, qu'*il existe quelque paire*

$$[u(x, y, z), v(x, y, z)]$$

de fonctions de x, y, z (considérées maintenant comme trois variables indépendantes) dont les déterminants différentiels, pris par rapport aux couples (y, z), (z, x), (x, y) respectivement, soient précisément les fonctions A, B, C.

» La recherche de fonctions telles que u, v revient effectivement à l'intégration des équations différentielles simultanées, de formes spéciales,

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} u & v \\ y & z \end{pmatrix} = A, \qquad \begin{pmatrix} u & v \\ z & x \end{pmatrix} = B, \qquad \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = C,$$

qui conduisent immédiatement aux équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles

$$(7) \qquad A\frac{du}{dx} + B\frac{du}{dy} + C\frac{du}{dz} = 0, \qquad A\frac{dv}{dx} + B\frac{dv}{dy} + C\frac{dv}{dz} = 0,$$

puis, par la méthode de Jacobi, aux formules

$$(8) \qquad u = \Upsilon(\mu, \nu), \qquad v = \Phi(\mu, \nu),$$

où $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$ sont deux fonctions déterminées de x, y, z, et Υ, Φ deux composantes encore indéterminées. La substitution de ces expressions (8) dans les équations proposées (6) change celles-ci en

$$(9) \qquad \Theta\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ y & z \end{pmatrix} = \mathrm{A}, \qquad \Theta\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ z & x \end{pmatrix} = \mathrm{B}, \qquad \Theta\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ x & y \end{pmatrix} = \mathrm{C},$$

si, pour abréger, on a posé

$$(10) \qquad \Theta(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Phi \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \Upsilon^{(1,0)}(\mu, \nu) & \Upsilon^{(0,1)}(\mu, \nu) \\ \Phi^{(1,0)}(\mu, \nu) & \Phi^{(0,1)}(\mu, \nu) \end{vmatrix};$$

et une même fonction Θ de x, y, z sera certainement fournie par la résolution de ces trois nouvelles équations (9), parce que $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$, intégrales particulières évidentes des équations (7), ont leurs trois déterminants différentiels forcément proportionnels à A, B, C.

» En ajoutant maintenant, membre à membre, les équations (9) différentiées préalablement par rapport à x, y, z respectivement, il vient facilement

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Theta}{dx} & \frac{d\Theta}{dy} & \frac{d\Theta}{dz} \\ \frac{d\mu}{dx} & \frac{d\mu}{dy} & \frac{d\mu}{dz} \\ \frac{d\nu}{dx} & \frac{d\nu}{dy} & \frac{d\nu}{dz} \end{vmatrix} = \frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{B}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dz},$$

parce que le multiplicateur de Θ s'y réduit, en fait, à o identiquement.

» Pour que les fonctions (8) puissent satisfaire aux équations proposées (6), l'identité (5) est donc nécessaire, parce que, d'après la formule de définition (10), Θ est une fonction composée finie des fonctions simples $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$. De plus, elle est suffisante, car, si elle a lieu, la relation précédente, se réduisant alors à

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Theta}{dx} & \frac{d\Theta}{dy} & \frac{d\Theta}{dz} \\ \frac{d\mu}{dx} & \frac{d\mu}{dy} & \frac{d\mu}{dz} \\ \frac{d\nu}{dx} & \frac{d\nu}{dy} & \frac{d\nu}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

montre que Θ, tirée de (9) en x, y, z, est bien une certaine fonction composée de $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$, dont l'intégration binaire de la composante, exécutée par les moyens indiqués dans le Mémoire mentionné au

commencement de cette Note, conduise immédiatement aux composantes Υ, Φ des formules (8). »

GÉOMÉTRIE. — *Sur l'homographie de la théorie des poutres.* Note de M. **Andrade.**

« I. Considérons un système de segments l_1, l_2, ..., l_i, l_{i+1}, ..., l_n, portés bout à bout et formant les travées successives d'une poutre à $n+1$ points d'appuis; puis, pour chaque segment ou travée l_{i+1}, une fonction *positive* φ_i, variant avec la position d'un point mobile M générateur de ce segment. Dans les poutres $\varphi_i = \frac{1}{EI}$ représente l'inverse du produit du coefficient d'élasticité E par le moment d'inertie I d'une section de la poutre passant en M. Sous le signe $\int_0^{l_i}$ désignons par x la distance du point M à l'origine du segment l_i. Sous le signe $\int_0^{l_{i+1}}$ désignons encore par x la distance du point générateur de l_{i+1} à l'origine de ce segment.

» Considérons, d'autre part, sur l_i un point $x = u_i$ et sur l_{i+1}, un point $x = u_{i+1}$. M. Maurice Lévy, dans sa *Statique graphique,* appelle *points correspondants* consécutifs deux points entre lesquels existe la relation

$$(1)\qquad \begin{cases} v_i = l_i - u_i, \\ \frac{1}{v_i l_i}\int_0^{l_i} x(l_i - x)\varphi_i dx + \frac{1}{u_{i+1} l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x)\, x\varphi_{i+1}\, dx \\ \qquad = \frac{1}{l_i}\int_0^{l_i} x\varphi_i\, dx + \frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x)\,\varphi_{i+1}\, dx. \end{cases}$$

» Je me propose d'indiquer pour le cas des φ_i quelconques, c'est-à-dire pour des poutres de sections variables, les propriétés similaires de celles démontrées par M. Maurice Lévy dans sa *Statique graphique* pour le cas particulier de $\varphi_i =$ const. se rapportant à des poutres de sections constantes.

» II. Je définis d'abord les *zones utilisables* de deux segments consécutifs relatives au sens indiqué pour le parcours de la suite des segments.

» Ces zones sont telles que v_i et u_{i+1} étant liés par l'homographie (1) les inégalités simultanées

$$l_i > v_i > v_i^0 > 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 < u_{i+1}^0 < u_{i+1} > l_{i+1}$$

s'entraînent mutuellement avec correspondance de leurs éléments situés sur une même verticale ; un calcul facile donne alors

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
v_i^0 &= \frac{\dfrac{1}{l_i}\displaystyle\int_0^{l_i}(l_i - x)\,x\,\varphi_i(x)\,dx}{\dfrac{1}{l_i}\displaystyle\int_0^{l_i} x\,\varphi_i(x)\,dx + \dfrac{1}{l_{i+1}}\displaystyle\int_0^{l_{i+1}}(l_{i+1} - x)\,\varphi_{i+1}(x)\,dx - \dfrac{1}{l_{i+1}^2}\displaystyle\int_0^{l_{i+1}}(l_{i+1} - x)\,x\,\varphi_{i+1}(x)\,dx},\\
u_{i+1}^0 &= \frac{\dfrac{1}{l_{i+1}}\displaystyle\int_0^{l_{i+1}}(l_{i+1} - x)\,x\,\varphi_{i+1}(x)\,dx}{\dfrac{1}{l_i}\displaystyle\int_0^{l_i} x\,\varphi_i(x)\,dx + \dfrac{1}{l_{i+1}}\displaystyle\int_0^{l_{i+1}}(l_{i+1} - x)\,\varphi_{i+1}(x)\,dx - \dfrac{1}{l_i^2}\displaystyle\int_0^{l_i} x(l_i - x)\,\varphi_i(x)\,dx}.
\end{aligned}
\right.
$$

» III. Je considère ensuite sur un segment l_i trois zones dont l'une est une zone moyenne et dont les deux autres, concentrées aux extrémités du segment et dénommées *zones d'accès*, sont ainsi définies :

» La *zone d'accès* qui s'appuie sur l'*origine* du segment est définie par la relation

$$
v_i \geqq \frac{\displaystyle\int_0^{l_i}(l_i - x)^2\,\varphi_i(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^{l_i}(l_i - x)\,\varphi_i(x)\,dx},
$$

la *zone d'accès* qui s'appuie sur l'*extrémité* du segment est définie par la relation

$$
u_i' \geqq \frac{\displaystyle\int_0^{l_i} x^2\,\varphi_i(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^{l_i} x\,\varphi_i(x)\,dx};
$$

pour que ces zones d'accès comprennent une zone moyenne, il faut et il suffit que la somme des limites de v_i et de u_i' surpasse l_i, c'est-à-dire que

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\int_0^{l_i} x^2\,\varphi_i(x)\,dx\right]\left[\int_0^{l_i}(l_i - x)\,\varphi_i(x)\,dx\right]\\
&\quad - \left[\int_0^{l_i} x\,\varphi_i(x)\,dx\right]\left[\int_0^{l_i} x(l_i - x)\,\varphi_i(x)\,dx\right] > 0;
\end{aligned}
\right.
$$

or cette dernière inégalité devient évidente si l'on observe que son premier membre peut s'écrire sous la forme de l'intégrale double suivante :

$$
\frac{l_i}{2}\int_0^{l_i}\int_0^{l_i}(x - t)^2\,\varphi_i(t)\,\varphi_i(x)\,dx\,dt.
$$

» IV. La première des formules (2) montre que l'inégalité $v_i > v_i^0$ sera *a fortiori* satisfaite si l'on pose

$$v_i > \frac{\int_0^{l_i} (l_i - x) x \varphi_i(x)\, dx}{\int_0^{l_i} x \varphi_i(x)\, dx};$$

or je dis que cette dernière inégalité sera satisfaite si le point considéré appartient à la zone d'accès qui s'appuie sur l'origine du segment; ceci revient à dire que l'on a

$$(4) \qquad \frac{\int_0^{l_i} (l_i - x)^2 \varphi_i(x)\, dx}{\int_0^{l_i} (l_i - x) \varphi_i(x)\, dx} > \frac{\int_0^{l_i} (l_i - x) x \varphi_i(x)\, dx}{\int_0^{l_i} x \varphi_i(x)\, dx};$$

or cette inégalité se ramène à l'inégalité (3) en posant

$$l_i - x = x',$$
$$\varphi(l_i - x) = \psi(x');$$

la première zone d'accès est donc dans la zone utilisable correspondante.

» V. Montrons enfin que l'inégalité $v_i \geqq \frac{\int_0^{l_i} (l_i - x)^2 \varphi_i(x)\, dx}{\int_0^{l_i} (l_i - x)\ \varphi_i(x)\, dx}$ entraîne cette autre

$$(5) \qquad v_{i+1} > \frac{\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x)^2 \varphi_{i+1}(x)\, dx}{\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x)\ \varphi_{i+1}(x)\, dx};$$

or, en désignant par P la quantité

$$P = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} x \varphi_i(x)\, dx - \frac{1}{l_i} \frac{\int_0^{l_i} (l_i - x) x \varphi_i(x)\, dx \int_0^{l_i} (l_i - x) \varphi_i(x)\, dx}{\int_0^{l_i} (l_i - x)^2 \varphi_i(x)\, dx},$$

nous avons

$$v_{i+1} \geqq \frac{l_{i+1} P + \frac{1}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x)^2 \varphi_{i+1}(x)\, dx}{P + \frac{1}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1} - x) \varphi_{i+1}(x)\, dx}.$$

P étant positif en vertu de (4), φ_{i+1} sera compris entre l_{i+1} et la quantité moindre $\dfrac{\displaystyle\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1}-x)^2 \varphi_{i+1}(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^{l_{i+1}} (l_{i+1}-x)\,\varphi_{i+1}(x)\,dx}$; l'inégalité (5) est donc démontrée.

» En d'autres termes :

» Le correspondant d'un point appartenant à la première zone d'accès de l_i reste donc dans la première zone d'accès de l_{i+1}. C'est ce que nous voulions établir. »

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques*. Note de M. **Émile Waelsch**, présentée par M. Darboux.

« Du centre de courbure principale c de la normale d'une surface F on peut dériver, d'après M. Darboux [1], les points $c_1, c_2, \ldots$ de sorte que la droite cc_1 est la caractéristique du plan normal de la ligne de courbure k de F. On démontre : Si F est une surface P respectivement S, pour lesquelles les k sont planes respectivement sphériques, *le lieu de* c_1 *est une courbe qui pour* P *tombe dans l'infini* [2].

» Si $e^2\,du^2 + g^2\,dv^2$ est l'élément de la représentation sphérique Φ de F, en paramètres de lignes de courbure, les coordonnées d'un point de Φ satisfont à l'équation de Laplace

$$(1)\qquad X_{uv} - \beta X_u - \beta_1 X_v = 0, \qquad \text{où} \qquad \beta = (le)_v, \qquad \beta_1 = (lg)_u.$$

» La demi-distance ρ des deux points c_1, c satisfait, d'après M. Guichard, à l'équation (2), adjointe de (1).

» On trouve en s'appuyant sur un théorème de M. E. Cosserat [3] :

» 1° Si l'invariant $h = \beta\beta_1 - \beta_u$ de (1) s'annule, F *est* P.

» 2° Si l'invariant $h_1 = 2h - h_{-1} - (2h)_{uv}$, s'annule le point c_1 décrit une courbe et F *est* S, si spécialement $\rho = g^{-1}\int h\,du$; si ρ est une intégrale

(1) Voir *Leçons sur la théorie générales des surfaces*, t. II, livre IV.

(2) Il suit que la développée (c) de S respectivement P est l'enveloppe de cônes ou de cylindres, pour lesquels les caractéristiques sont géodésiques; de là on peut démontrer que le problème des S dépend de quatre et celui des P de trois fonctions arbitraires de la *même* variable.

(3) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, p. 18.

générale de (2), F *est une surface* γ, qui est définie par la propriété que ses points c_2 tombent dans l'infini, et qui a la même représentation sphérique que S.

» Pour déterminer la représentation sphérique Σ des S et γ, et Π de P, posons

$$(\xi-\eta)X = 1+\xi\eta, \qquad (\xi-\eta)Y = \iota(1-\xi\eta), \qquad (\xi-\eta)Z = \xi+\eta.$$

» Les seconds membres satisfont à une équation de Laplace, qui a les mêmes invariants que (1) et à laquelle satisfait aussi $\xi-\eta$; par suite, elle a les intégrales 1, ξ, η, $\xi\eta$.

» 1° Si $h=0$, cette intégrale a la forme $\sigma\theta$, où $\theta = U+\int V\alpha\,dv$. Donc on pose

$$(2) \qquad \xi = \frac{\theta_1}{\theta_0}, \qquad \eta = \frac{\theta_2}{\theta_0}, \qquad \xi\eta = \frac{\theta_3}{\theta_0}, \qquad \text{où} \qquad \theta_i = U_i + \int V_i\alpha\,dv,$$

et l'on trouve que l'on a à déterminer α de manière que

$$(3) \qquad \theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3 = 0.$$

» 2° Si $h_1=0$, d'après M. Darboux, cette intégrale a la forme $\sigma\vartheta$, où $\vartheta = \theta\alpha_u - \theta_u\alpha$. Il suit, comme ci-dessus, que l'on a

$$(4) \qquad \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_0\vartheta_2 = 0,$$

qui donne, si ϖ est une fonction arbitraire de v,

$$(5) \qquad \theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3 = \varpi\alpha^2.$$

» Déterminons α de manière que (5) soit remplie. En dérivant (5) après v, et posant $V_0=1$, et comme il est permis, $V_1=v$, on a

$$(6) \qquad (\theta_1 - v\theta_0)(\theta_2 - V_2\theta_0) = M^2\theta_0^2,$$

où

$$(7) \qquad \theta_0^2 M^2 = V\theta_0 - \varpi'\theta_0\theta_0' - 2\varpi\theta_0\theta_0'' + \varpi\theta_0'^2, \qquad \text{où} \qquad V = vV_2 - V_3.$$

» L'équation (6) donne

$$\theta_1 = (v+M\lambda)\theta_0, \qquad \theta_2 = (V_2 + M\lambda^{-1})\theta_0;$$

en dérivant, on trouve

$$(v+M\lambda)'\theta_0 + M\lambda\alpha = 0, \qquad (V_2+M\lambda^{-1})'\theta_0 + M\lambda^{-1}\alpha = 0.$$

» La première de ces équations donne $\theta_0 = -\mu'$, où $-\frac{\mu}{\mu'} = M\lambda$; de la deuxième, on déduit :

$$(8) \qquad M^2(2\mu\mu'' - \mu'^2) - (M^2)'\mu\mu' - V_2'\mu^2 = 0.$$

» En éliminant M de (7) et (8), on trouve une équation en μ de quatrième ordre et du deuxième degré dont le premier membre donne, en dérivant et supprimant le facteur μ, l'*équation autoadjointe générale* suivante :

$$2\varpi\mu^{(5)} + 5\varpi'\mu^{(4)} + 2(2\varpi'' + V'')\mu''' + (\varpi''' + 3V')\mu'' + (V'' - 2V_2')\mu' - V_2''\mu = 0.$$

» Les cinq fonctions U_i, qui jouent le rôle de constantes arbitraires en μ, satisfont à la même relation quadratique, comme les intégrales (9). A cause de la relation

$$\theta_{1u}\theta_{2u} - \theta_{0u}\theta_{3u} = \varpi\alpha_u^2,$$

on démontre qu'elles satisfont aussi à une équation autoadjointe. Il reste, par suite, une fonction arbitraire de u, car on peut poser $U_0 = 1$, $U_1 = u$.

» Si l'on suppose V_1 générale, on peut mettre les intégrales particulières de (9) et les U_i sous des formes spéciales qui se trouvent chez M. Darboux (*loc. cit.*, p. 119 et 143). μ prend par suite la forme

$$f(u)\varphi(v)\left\{[\beta(u) - \gamma(v)](\beta'' - \gamma'') - \frac{(\beta' - \gamma')^2}{2} - \beta''\gamma''\frac{(u-v)^2}{2} + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')(u - v)\right\}.$$

» En égalant les coefficients de (9) à ceux de l'équation à laquelle satisfont ces formes spéciales de μ, on trouve les V_1, V_2, V_3 par deux quadratures. Les deux signes de ces quadratures sont les seuls qui figurent dans les formules explicites pour Σ.

» Quant à Π, on la trouve en posant $\varpi = 0$; le μ correspondant satisfait maintenant à une équation autoadjointe générale du troisième ordre.

» Il est aisé de voir comment se traitent les surfaces pour lesquelles les deux systèmes de lignes de courbure sont planes ou sphériques; pour elles s'annulent deux des quatre invariants h_{-2}, h_{-1}, h, h_1 de l'équation (1). »

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace.* Note de M. **N.-I. Hatzidakis**, présentée par M. Darboux.

« Gœttingue, 30 mars 1899.

« 1. Étant données deux courbes quelconques c et c' dans l'espace, on peut, de différentes manières, exprimer la courbure et la torsion de l'une par la courbure, la torsion et l'élément de l'arc de l'autre et par *la position mutuelle* des deux courbes. Le procédé le plus simple est le suivant : Soit u la variable indépendante dont dépendent les deux courbes. Menons par les points correspondants M et M' de c et de c' deux trièdres parallèles, dont les axes des z soient parallèles à la perpendiculaire commune aux deux tangentes en M et M'; soit de plus axe des x d'un de ces trièdres la tangente à la courbe c. Si l'on considère ces trièdres comme appartenant à deux surfaces quelconques passant respectivement par les courbes et ayant, le long de ces courbes, des normales parallèles (les axes des z et des z'), on peut évidemment appliquer à chacune des courbes les formules de M. Darboux [*Surfaces*, t. II, p. 354, 357; formules (17), (18) et (22)]. On aura alors pour la courbe c

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{\rho}\cos\varpi = \dfrac{ds}{\rho_n} = -q\,du, \\ \dfrac{ds}{\rho}\sin\varpi = \dfrac{ds}{\rho_g} = \quad r\,du, \\ \dfrac{ds}{\tau} - d\varpi = \dfrac{ds}{\tau_g} = -p\,du; \end{cases}$$

et pour la courbe c'

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds'}{\rho'}\cos\varpi' = \dfrac{ds'}{\rho'_n} = \quad \sin\omega\, p\,du - \cos\omega\, q\,du, \\ \dfrac{ds'}{\rho'}\sin\varpi' = \dfrac{ds'}{\rho'_g} = d\omega + r\,du, \\ \dfrac{ds'}{\tau'} - d\varpi' = \dfrac{ds'}{\tau'_g} = -\cos\omega\, p\,du - \sin\omega\, q\,du; \end{cases}$$

d'où, en éliminant p, q, r entre (1) et (2), il vient

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds'}{\rho'_n} = \dfrac{ds}{\rho_n}\cos\omega - \dfrac{ds}{\tau_g}\sin\omega, \\ \dfrac{ds'}{\rho'_g} = \dfrac{ds}{\rho_g} + d\omega, \\ \dfrac{ds'}{\tau'_g} = \dfrac{ds}{\rho_n}\sin\omega + \dfrac{ds}{\tau_g}\cos\omega; \end{cases}$$

qui sont les relations cherchées, car elles expriment $\frac{ds'}{\rho'}$, $\frac{ds'}{\tau'}$ (et ϖ') par les éléments de la position mutuelle ω et ϖ. Ces formules coïncident, aux notations près, avec celles données en premier lieu par M. Schönflies [1], mais il les trouve plus difficilement et sans remarquer qu'elles sont *tout à fait* générales. On en déduit en effet, par spécification, toute une foule de relations connues, mais trouvées par des voies très variées. (Voir, par exemple, SCHELL, *Kurven*, t. II; 1898.)

» 2. Si l'on cherchait les relations entre les éléments de deux courbes pris, non plus par rapport à *leur image sphérique commune*, mais par rapport à deux images sphériques *perpendiculaires* entre elles, on aurait, comme on le démontre facilement, à permuter circulairement, dans les formules (α), les éléments de l'une ou de l'autre courbe *une* ou *deux* fois.

» 3. Si, plus généralement, on considère les éléments de deux courbes par rapport à deux trièdres *différents* xyz, $x'y'z'$, on aura évidemment

$$\begin{aligned} p' &= \alpha p + \beta q + \gamma r, \\ q' &= \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, \\ r' &= \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r; \end{aligned}$$

et, par un raisonnement semblable au précédent, on trouvera les formules les plus générales

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds'}{\rho'_n} &= \sin\omega\left(\alpha\frac{ds}{-\tau_g} + \beta\frac{ds}{-\rho_n} + \gamma\frac{ds}{\rho_g}\right) \\ &\quad - \cos\omega\left(\alpha'\frac{ds}{-\tau_g} + \beta'\frac{ds}{-\rho_n} + \gamma'\frac{ds}{\rho_g}\right), \\ \frac{ds'}{\rho'_g} &= d\omega + \alpha''\frac{ds}{-\tau_g} + \beta''\frac{ds}{-\rho_n} + \gamma''\frac{ds}{\rho_g}, \\ \frac{ds'}{\tau'_g} &= -\cos\omega\left(\alpha\frac{ds}{-\tau_g} + \beta\frac{ds}{-\rho_n} + \gamma\frac{ds}{\rho_g}\right) \\ &\quad - \sin\omega\left(\alpha'\frac{ds}{-\tau_g} + \beta'\frac{ds}{-\rho_n} + \gamma'\frac{ds}{\rho_g}\right). \end{aligned} \right.$$

» Mais, il est bon de le remarquer, toutes ces formules contiennent le rapport $\frac{ds'}{ds}$; il faudra donc, dans chaque cas particulier, trouver ds' en fonction de ds, ρ, τ par un procédé spécial. »

---

[1] *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Heft I; 1898).

PHYSIQUE. — *Sur l'action d'une augmentation ou d'une diminution de pression sur l'interrupteur électrolytique.* Note de M. **A. Le Roy**, présentée par M. d'Arsonval.

« Si l'on dispose un interrupteur électrolytique pour bobine d'induction, suivant les indications données par M. Wehnelt et par M. d'Arsonval, c'est-à-dire en le constituant avec un très court fil de platine formant anode et une large surface de mercure formant cathode, de l'eau acidulée par l'acide sulfurique à 20-25 pour 100 étant employée comme électrolyte, on observe que cet interrupteur, intercalé en tension dans le circuit primaire d'une bobine d'induction et actionné par le courant d'un secteur à 120 volts, fonctionne normalement selon les indications données par ces savants. Mais si, par un artifice approprié, on vient à diminuer ou à augmenter la pression de l'atmosphère gazeuse du vase dans lequel est placé l'électrolyte, on constate qu'une diminution de pression croissante provoque l'arrêt des phénomènes d'interruption du courant, en empêchant les phénomènes de caléfaction à l'anode, et qu'une augmentation de pression donne lieu aux mêmes résultats, en laissant accumulés sur les anodes les gaz électrolytiques. »

PHYSIQUE. — *Quelques conditions de fonctionnement de l'interrupteur électrolytique de M.* Wehnelt. Note de M. **Paul Bary**, présentée par M. d'Arsonval.

« Par l'emploi de l'interrupteur électrolytique de Wehnelt, on peut observer trois phénomènes très distincts qui dépendent, pour une anode de platine donnée, de la self-induction du circuit, de sa résistance et de la force électromotrice employée.

» Avec une faible différence de potentiel, on observe simplement l'électrolyse de l'eau. Si l'on augmente la différence de potentiel, le phénomène change brusquement à une valeur donnée de celle-ci : les gaz qui se dégagent autour de l'anode deviennent lumineux, sans que le platine rougisse, en produisant un bruit très caractéristique; ce phénomène, qui a été observé pour la première fois par Fizeau et Foucault [1], est celui qui a été

---

[1] Fizeau et Foucault, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. II, p. 383; 1844.

utilisé par le Dr Wehnelt dans son interrupteur. Enfin, en augmentant encore la force électromotrice, on arrive à une troisième phase où le bruit cesse; les gaz dégagés ne sont plus lumineux, mais le platine rougit dans le liquide dont il reste séparé en partie par une gaine de vapeur; ce troisième phénomène est celui décrit par MM. Violle et Chassagny (1).

» Ainsi que l'a indiqué M. d'Arsonval (2), on peut substituer, à la solution sulfurique, une solution de potasse; l'expérience m'a montré, en outre, que tous les corps, dont l'électrolyse donnait un simple dégagement d'oxygène au pôle +, pouvaient être indifféremment employés. Dans les expériences dont les résultats suivent, j'ai employé une solution de chlorure d'ammonium dans l'eau, et je mesurais la fréquence en observant l'anode de l'électrolyseur au miroir tournant. Le résultat de ces expériences est que, pour que le phénomène de Fizeau et Foucault se produise, il faut que la différence de potentiel soit comprise entre les valeurs maxima et minima en dehors desquelles on a, ou le phénomène de MM. Violle et Chassagny, ou l'électrolyse simple.

» La tension minima est d'autant plus faible que la self-induction du circuit est plus grande, alors que la tension maxima croît avec la self-induction du circuit; de telle sorte que les limites entre lesquelles on observe le phénomène des interruptions se rapprochent quand le coefficient de self-induction diminue; pour une self-induction nulle on ne produit, à aucune valeur de la tension, le phénomène de Fizeau et Foucault et l'on passe directement de l'électrolyse simple au phénomène de MM. Violle et Chassagny, la tension nécessaire pour passer de l'un à l'autre ne dépendant que des dimensions du fil de platine et de la résistance du circuit.

» Le Tableau ci-dessous donne les valeurs trouvées dans une série d'expériences, en employant un fil de platine de $0^{mm},35$ et dépassant le verre de $11^{mm},5$ de longueur, avec des bobines dont la self-induction variait de 0,0038 à 53 milli-henrys; ce Tableau est à double entrée : sur la première ligne horizontale sont portées les différences de potentiel et sur la première ligne verticale les coefficients de self-induction, en regard de ces lignes sont portées les différentes valeurs de la fréquence. Les lettres ES signifient qu'il y a électrolyse simple et les lettres VC qu'on a le phénomène de MM. Violle et Chassagny.

---

(1) Violle et Chassagny, *Comptes rendus*, t. CVIII, p. 284; 1889.
(2) D'Arsonval, *Comptes rendus*, 27 février 1899.

Coefficients de self-induction en milli-henrys.	Différences de potentiel exprimées en volts.									
	24	36	48	60	72	84	96	120	168	180
0,0038..	ES	ES	ES	ES	ES	Marche irrégulière.	VC	VC	»	»
0,062...	ES	ES	ES	ES	2850	3800	VC	VC	»	»
1,09....	ES	Marche irrégulière.	930	1220	1400	1630	1750	1850	VC	»
2,8.....	ES	755	945	1140	»	1320	»	»	»	»
11.......	»	380	»	»	»	760	»	»	»	»
53.......	ES	122	164	205	245	»	275	330	490	570

» Afin de déterminer l'influence de la pression, nous avons fait, M. Gasnier et moi, au laboratoire de M. Hospitalier, quelques mesures de la fréquence, sur un circuit déterminé et constant, pour des pressions réelles variant de 25^{cm} à 150^{cm} de mercure. L'appareil tel qu'il était constitué ne permettait pas beaucoup de précision dans la mesure; nous avons trouvé cependant que la fréquence diminuait pour des pressions croissantes un peu moins qu'en raison de la proportionnalité inverse.

» M. S.-P. Thompson (1) a signalé qu'à une pression de 3 atmosphères la fréquence était plus faible qu'à la pression atmosphérique.

» M. C. Swinton (2) ayant constaté qu'on ne pouvait mettre en marche l'interrupteur Wehnelt en fermant le circuit par immersion de l'anode dans l'électrolyte, j'ai cherché à répéter cette expérience sans succès et j'ai toujours observé qu'il n'y avait aucune différence à établir le courant par immersion de l'anode ou par tout autre moyen. »

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la variation de la résistivité électrique des métaux et de leurs alliages due à la torsion.* Note de M. **Colomán de Szily**, présentée par M. Lippmann.

« Toutes les actions physiques et mécaniques, comme le recuit, la trempe, la traction, la torsion, etc., ont une influence sur la résistance électrique des métaux et de leurs alliages. Toutefois, les recherches expé-

(1) S.-P. Thompson, Lettre adressée le 8 mars 1899 à la Société physique de Londres.

(2) C. Swinton, Communication du 10 mars 1899 à la Société physique de Londres.

rimentales relatives à ces phénomènes sont encore assez incomplètes. Je me suis proposé d'en reprendre l'étude et de rechercher notamment quelle est la variation de la résistance des fils par suite de la torsion.

» Comme, d'après les expériences préliminaires, on devait s'attendre à des variations extrêmement faibles, la plus grande difficulté qu'il fallait vaincre pour arriver à des mesures exactes était l'élimination de l'influence de la température ambiante. Pour y arriver, j'ai choisi, d'une part, un alliage dont la résistance électrique peut être considérée comme constante, pour des petites variations de température du moins : c'est l'alliage connu sous le nom de *constantan*. D'autre part, j'ai exécuté les mesures dans une pièce souterraine où les fluctuations de la température ambiante ne dépassaient guère un dixième de degré centigrade et que l'Institut de Physique de l'École Polytechnique fédérale, à Zurich, a bien voulu mettre à ma disposition.

» Dans mes expériences, je me suis servi de la méthode de Wheatstone, modifiée par Kirchhoff et connue sous le nom de *pont à corde*.

» Le fil de constantan à examiner, bien recuit au préalable, fut suspendu à l'intérieur d'un tube de laiton vertical, d'une longueur de $3^m,50$, et il fut soigneusement tendu par un poids de laiton soudé à son extrémité inférieure. Après chaque torsion, ce poids pouvait être maintenu dans sa nouvelle position au moyen de deux ergots. Tous les points de jonction du système furent établis sans exception par des godets remplis de mercure. Pour la jonction des diverses branches, je me suis servi de fils de cuivre de 3^{mm} de diamètre; par contre, la *corde* fut constituée par un fil de constantan de $1^m,50$ de longueur, tendu horizontalement et alimenté par le courant d'une batterie de trois circuits Daniell.

» Les résistances auxiliaires furent choisies de manière que l'on pût atteindre, dans le résultat des mesures de résistance, une approximation de 0,000001. Au commencement de chaque expérience, le fil était en équilibre moléculaire au point de vue élastique. Après l'observation de la position du galvanomètre, le fil fut tordu d'une révolution complète, soit d'un angle de 2π, et fixé dans cette nouvelle position. Trois observations de la déviation de l'aiguille du galvanomètre furent alors exécutées et le fil fut de nouveau tordu de 360° et ainsi de suite.

» Pour donner une idée de l'ordre de grandeur de la variation de résistance, j'inscris ici les résultats d'une série de mesures.

» La résistance initiale du fil de constantan était de $10^{ohms},60020$.

Angle de torsion.	$W_i - W_0$.	$W_i - W_{i-1}$.	Angle de torsion.	$W_i - W_0$.	$W_i - W_{i-1}$.
$1,2\pi$	0,00002	0,00002	$3,2\pi$	0,00006	0,00002
$2,2\pi$	0,00004	0,00002	$4,2\pi$	0,00015	0,00009

Angle de torsion.	$W_i - W_0$.	$W_i - W_{i-1}$.	Angle de torsion.	$W_i - W_0$.	$W_i - W_{i-1}$.
5,2 π	0,00024	0,00009	16,2 π	0,00178	0,00022
6,2 π	0,00033	0,00009	17,2 π	0,00200	0,00022
7,2 π	0,00041	0,00008	18,2 π	0,00223	0,00023
8,2 π	0,00050	0,00009	19,2 π	0,00247	0,00024
9,2 π	0,00059	0,00013	20,2 π	0,00273	0,00026
10,2 π	0,00072	0,00013	21,2 π	0,00299	0,00026
11,2 π	0,00085	0,00013	22,2 π	0,00324	0,00025
12,2 π	0,00099	0,00014	23,2 π	0,00353	0,00029
13,2 π	0,00117	0,00018	24,2 π	0,00382	0,00029
14,2 π	0,00135	0,00018	25,2 π	0,00412	0,00030
15,2 π	0,00156	0,00021			

» Je fais remarquer que la limite d'élasticité dans ce cas se trouvait à peu près à 3,2 π.

» Les résultats d'un grand nombre de séries de mesures sont suffisamment concordants et montrent que la résistance électrique va en augmentant avec l'angle de torsion, et cela non proportionnellement à l'angle, mais bien plus vite. Si nous déterminons pour chaque cas la limite de l'élasticité, nous trouvons que, jusqu'à cette limite, l'augmentation de la résistance peut être considérée comme proportionnelle à l'angle de torsion.

» J'ai examiné en même temps la question suivante qui s'est posée au cours de mes expériences : La résistance électrique du fil tordu reste-t-elle constante ou bien varie-t-elle avec le temps ? J'ai trouvé que la résistance du fil ne reste pas du tout constante après la torsion, mais diminue certainement, quoique extrêmement lentement, avec le temps. De même, j'ai constaté que la résistance électrique du fil ramené par des torsions inverses à sa position initiale va en diminuant avec le temps et même bien plus vite que dans le premier cas ; probablement parce qu'elle peut atteindre plus rapidement son équilibre moléculaire. On sait qu'en faisant subir à un fil une forte torsion et en le laissant ensuite reprendre son état non déformé, la limite d'élasticité du fil se déplace et atteint une valeur plus élevée qu'avant la déformation. En examinant la variation de résistance d'un fil déformé et soumis de nouveau à une série de torsions, j'ai pu constater une concordance remarquable avec le fait ci-dessus, car la proportionnalité entre la variation de résistance et l'angle de torsion allait plus loin pour le même fil après qu'avant la déformation.

» Si j'ajoute que la comparaison des effets sur des fils de divers diamètres

m'a démontré que la variation de la résistivité électrique augmente plus rapidement que le diamètre, j'ai fini de résumer les résultats que j'ai pu obtenir pour le constantan.

» Il fallait maintenant répéter les mêmes recherches sur d'autres métaux. J'ai fait des expériences avec des fils de maillechort et de nickeline, en me servant des mêmes dispositions que celles décrites ci-dessus, mais il m'a été impossible d'obtenir une exactitude suffisante à cause de l'influence des variations de la température ambiante. Toutefois, autant que j'ai pu le voir, le caractère du phénomène semble être pour ces divers métaux (ainsi, du reste, que pour le cuivre, pour lequel j'ai également entrepris des recherches) le même que celui relevé dans le cas du constantan [1]. »

OPTIQUE. — *Points corrélatifs des points de Bravais.* Note de M. **Pierre Lefebvre**, présentée par M. Lippmann.

« Bravais a indiqué l'existence, dans un système optique centré quelconque, de deux points coïncidant avec leurs conjugués par rapport au système. Ce sont deux points de l'axe, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie; ils peuvent être *réels* ou *imaginaires*. Cette dernière circonstance a certainement beaucoup limité leur emploi.

» Je me propose de montrer qu'il existe dans un système optique centré des points doués de propriétés assez remarquables, dont l'existence est corrélative de celle des points de Bravais; de telle sorte qu'on peut toujours employer les uns ou les autres.

» Dans le cas où un système n'a pas de foyers, ses points de Bravais sont réels, l'un d'eux étant d'ailleurs à l'infini; nous pouvons donc nous borner à étudier le cas où le système a des foyers.

» Soient F et F′ les foyers principaux du système; I une droite perpendiculaire à l'axe en B; I′ son image perpendiculaire à l'axe en B′; on sait que

$$(1) \qquad \overline{FB}.\overline{F'B} = -H,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{I'}{I}\right)^3 = -K\frac{\overline{F'B'}}{\overline{FB}},$$

[1] Ce travail fut commencé au laboratoire de recherches physiques à la Sorbonne, à Paris, et terminé à l'Institut de Physique de l'École Polytechnique, à Zurich.

H et K étant deux constantes des systèmes; cette dernière K en particulier est l'indice du premier milieu par rapport au dernier. H et K son positifs dans les systèmes où il n'y a pas de réflexions ou un nombre pair, négatifs dans ceux où il y a une réflexion ou un nombre impair. D'après l'équation (1), les points de Bravais sont donnés par

$$\overline{FB}.\overline{F'B} = -H,$$

ou

$$\overline{FB}^2 - \overline{FF'}.FB + H = 0. \tag{3}$$

Ils ne sont donc imaginaires que si $\overline{FF'}^2 - 4H < 0$, ce qui exclut le cas de $H < 0$ et peut s'interpréter ainsi :

» Dans un système optique centré, où les points de Bravais sont imaginaires, on peut former un triangle isoscèle réel, ayant FF' pour base, $\sqrt{H}$ pour côtés. Nous appellerons le troisième *sommet de ce triangle, pôle du système*.

» Dans l'espace, le lieu des pôles d'un système est la circonférence intersection des sphères décrites de F et F' comme centres avec $\sqrt{H}$ pour rayon. Dans un plan passant par l'axe, il y a généralement deux pôles symétriques par rapport à l'axe. Un cas singulier se présenterait si F et F' coïncidaient; en ce cas tous les points de la sphère de centre F et de rayon $\sqrt{H}$ auraient les propriétés des pôles. Soit ω le pôle d'un système.

» 1° *On peut amener* ωB *sur* ωB' *ou sur son prolongement en faisant tourner autour du pôle* ω *d'un angle constant dans un sens déterminé.*

» En effet, les triangles ωFB, B'F'ω sont semblables, comme ayant les angles en F et F' égaux, compris entre côtés proportionnels, d'après (1). Le triangle B'ωB sera semblable aux précédents comme ayant ses angles en B et B' égaux respectivement aux angles de ces triangles. Il en résulte :

$$\widehat{B'\omega B} = \widehat{BF\omega} = \widehat{\omega F'B'}.$$

» Selon que B sera d'un côté ou de l'autre de F, $\widehat{BF\omega}$ coïncidera avec $\widehat{F'F\omega}$, ou sera supplémentaire et de sens contraire. Donc $\widehat{B'\omega B}$ est aussi égal à $\widehat{F'F\omega}$ et de même sens, ou supplémentaire et de sens contraire. Donc, on peut amener ωB sur ωB' ou son prolongement par une rotation autour du pôle égale à $\widehat{F'F\omega}$ et de sens contraire. On pourrait encore amener

ωB sur ωB' ou son prolongement par une rotation supplémentaire de $\widehat{F'F\omega}$ et de même sens.

» L'image d'un objet I est droite ou renversée selon que l'objet est d'un côté ou de l'autre de F, par suite, selon que la rotation effectuée autour du pôle amènera ωB sur ωB' ou sur son prolongement.

» Nous appellerons *angle caractéristique du système* l'angle constant dont il faut faire tourner ωB pour l'amener *sur* ωB' *même* quand l'image est *droite, sur son prolongement* quand l'image est *renversée*.

» 2° Il résulte immédiatement de ce qui précède que *du pôle on voit sous un même angle un segment de l'axe et son image.*

» 3° *Le rapport de l'image* I' *à l'objet* I *est égal au rapport des distances de leurs pieds sur l'axe au pôle, multiplié par la racine carrée de l'indice* K.

» En effet, les triangles ωFB, B'F'ω, B'ωB étant semblables :

$$\pm \frac{\overline{\omega F}}{\overline{FB}} = \mp \frac{\overline{F'B'}}{\overline{\omega F'}} = \frac{\overline{\omega B'}}{\overline{\omega B}},$$

il en résulte d'après (2) :

$$(4) \qquad \frac{I}{I'} = \frac{\overline{\omega B'}}{\overline{\omega B}} \sqrt{K}.$$

» En résumé :

» *Pour construire l'image d'un objet, il suffira de faire tourner, autour du pôle, de l'angle caractéristique, le rayon vecteur qui joint au pôle le pied de l'objet sur l'axe; le pied de l'image sur l'axe se trouve sur la nouvelle position du rayon vecteur ou son prolongement. L'image est droite dans le premier cas, renversée dans le second. Son rapport à l'objet est égal au rapport des distances au pôle des pieds de l'image et de l'objet, multiplié par l'indice du premier milieu par rapport au dernier.*

» Dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques, le rapport de l'image à l'objet est simplement le rapport des distances au pôle des pieds de l'image et de l'objet sur l'axe.

» Les pôles ne peuvent être réels qu'autant que $\overline{FF'}^2 - LH$ est négatif. Dans le cas limite où $\overline{FF'} = 2\sqrt{H}$, le point de l'axe équidistant des foyers pourra être regardé comme point de Bravais double, mais aussi comme limite des pôles : c'est ainsi que le rapport de l'image à l'objet sera égal au rapport de leurs distances à ce point, multiplié par l'indice K. Le sommet commun des faces d'une lentille mince aurait précisément cette propriété.

Dans une lentille épaisse (et plus généralement dans un système optique centré), les propriétés de ce point se retrouvent partie dans les points de Bravais, partie dans les pôles; ces points n'étant d'ailleurs pas simultanément réels.

» Un système optique centré est complètement déterminé, si l'on se donne l'axe, un pôle, l'angle caractéristique et l'indice relatif de réfraction des milieux extrêmes.

» De ces données, on déduira immédiatement les foyers, plans principaux, points nodaux, etc., d'après les propriétés indiquées. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur un nouveau procédé de préparation du siliciure de fer* SiFe (1). Note de M. **P. Lebeau**, présentée par M. Henri Moissan.

« Dans le cours de nos recherches sur le traitement de l'émeraude au four électrique en vue de préparer facilement une notable quantité de glucine, nous avons souvent rencontré, dans les produits de réduction de l'émeraude par le charbon ou le carbure de calcium, des masses métalliques à cassure cristalline présentant parfois de véritables géodes remplies de cristaux. Nous avons pu détacher mécaniquement quelques-uns de ces cristaux, et l'analyse qualitative nous a montré qu'ils renfermaient du silicium, du fer et du cuivre. Quelques dosages effectués sur des échantillons provenant de masses métalliques différentes avaient donné des résultats suffisamment concordants pour que nous supposions avoir obtenu un siliciure double de fer de cuivre.

» Voici, en effet, deux de ces analyses établissant, pour ces cristaux, une grande analogie de composition :

	Échantillon n° 1.	Échantillon n° 2.
Silicium	25,8	26,3
Fer	30,2	30,5
Cuivre	41,4	40,7
Siliciure de carbone	2,1	2,3
	99,5	99,8

» Un rapide examen des propriétés nous a démontré que ce prétendu

(1) Laboratoire des Hautes Études de M. Moissan.

siliciure double, malgré son apparence, était formé par des cristaux de siliciure de fer, très nets, facilement isolables par un traitement à l'acide azotique, cristaux cimentés en quelque sorte par du siliciure de cuivre. Cette expérience nous a permis de constater que le siliciure de cuivre était un excellent dissolvant du siliciure de fer et nous avons pensé à utiliser cette propriété à la préparation de ce dernier, soit en dissolvant dans le siliciure de cuivre fondu du siliciure de fer préalablement préparé, soit en préparant le siliciure de fer en présence d'un excès de siliciure de cuivre. Nous avons reconnu en outre que le cuivre possédait une affinité moindre pour le silicium que le fer, et qu'il suffisait de chauffer ce dernier métal en présence d'un excès de siliciure de cuivre fondu pour obtenir dû siliciure de fer cristallisant dans l'excès de cuivre silicié. C'est même cette dernière réaction qui nous a donné le meilleur résultat au point de vue de la pureté et de la cristallisation des échantillons.

» *Préparation du siliciure de fer.* — Le siliciure de cuivre que nous avons employé est le siliciure de cuivre du commerce renfermant de 15 à 20 pour 100 de silicium et qu'il est facile de se procurer en grande quantité.

» Ce siliciure est grossièrement pulvérisé et mélangé avec 10 pour 100 de son poids de limaille de fer aussi pure que possible. Nous opérions sur 400^{gr} de siliciure de cuivre et 40^{gr} de limaille de fer. Le mélange était placé dans un creuset de charbon que nous disposions dans le four électrique à creuset de M. Moissan. Le four était alimenté par un courant de 950 ampères sous 45 volts et la durée de la chauffe était de quatre à cinq minutes.

» On obtient un culot parfaitement fondu à cassure homogène très cristalline et d'un blanc métallique rappelant la cassure récente du siliciure de cuivre. Ce culot est concassé et les fragments obtenus sont traités dans une capsule de porcelaine par de l'acide azotique étendu de son volume d'eau. L'attaque est rapide au début puis il est nécessaire d'élever progressivement la température. L'excès de siliciure de cuivre se dissout peu à peu et l'on voit apparaître les cristaux de siliciure de fer encore empâtés de silice gélatineuse. Lorsque la masse est complètement désagrégée, on lave par décantation pour éliminer complètement l'azotate de cuivre. On verse ensuite sur le résidu 200^{cc} à 300^{cc} de lessive de soude ordinaire étendue de son volume d'eau et l'on maintient la capsule de dix à quinze minutes au bain-marie en agitant constamment son contenu.

» On lave ensuite avec une grande quantité d'eau et les cristaux de siliciure de fer apparaissent alors très brillants, doués d'un vif éclat métallique. On traite de nouveau par l'acide azotique et par la soude jusqu'à ce que ces réactifs n'enlèvent plus trace de cuivre et de silice. On lave finalement à l'eau distillée et l'on sèche à l'étuve.

» Le siliciure de fer que l'on obtient par ce procédé répond à la for-

mule SiFe, il diffère donc comme composition du siliciure $SiFe^2$ préparé par M. Moissan (¹) au four électrique par union directe du fer et du silicium. Il est intéressant de rapprocher ce fait de la production du carbure de tungstène CTu, obtenu par M. Williams (²) en opérant la réduction de l'acide tungstique par le charbon en excès en présence de carbure de fer servant de dissolvant, alors que le carbure préparé par M. Moissan (³) par union directe du carbone et du tungstène a pour formule CTu^2.

» La présence d'un composé métallique servant de dissolvant, tel que la fonte de fer ou le cuivre silicié dans le cas qui nous concerne, semble donc suffisante pour donner naissance à une série de combinaisons de composition différente. Il est possible d'expliquer ce fait en considérant que ce dissolvant empêche d'atteindre une température aussi élevée que dans le cas d'une combinaison directe d'un métal avec le silicium ou le carbone, par le fait même de sa volatilisation, et permet d'obtenir, par exemple, un siliciure plus riche en silicium. Le siliciure ainsi formé étant susceptible d'être dissocié à plus haute température, comme d'ailleurs cela a été reconnu par M. Williams pour le carbure de tungstène CTu, qui se décompose au four électrique lorsqu'on le chauffe seul dans un creuset de charbon en donnant le carbure de tungstène CTu^2 et du graphite.

» Le siliciure SiFe a déjà été obtenu par Fremy (⁴) dans l'action du chlorure de silicium sur le fer porté au rouge, et par Hahn (⁵) qui le décrit comme constituant le résidu cristallin soyeux résultant de l'action de l'acide fluorhydrique sur le siliciure $SiFe^2$ impur. Celui que nous avons préparé se présente soit en cristaux isolés tétraédriques, soit en cristaux groupés suivant un arrangement rappelant celui du silicium cristallisé.

» La densité des cristaux à 15° est de 6,17. Ils rayent facilement le quartz mais n'attaquent pas le corindon.

» Le siliciure de fer n'est pas altéré visiblement dans un courant d'hydrogène ou d'oxygène sec à la température de la grille à analyse.

» Le fluor l'attaque à froid avec incandescence en produisant du fluorure de fer qui conserve la forme des cristaux.

» Le chlore et le brome réagissent également avec incandescence au rouge sombre.

» Le soufre ne l'attaque pas au-dessous du rouge.

» Les acides minéraux en solutions étendues ou concentrées sont sans action sur ce

---

(¹) H. Moissan, *Comptes rendus*, t. CXXI, p. 794.

(²) P. Williams, *Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1722.

(³) H. Moissan, *Comptes rendus*, t. CXXIII, p. 13.

(⁴) Fremy, *Encyclopédie chimique*, article *Fer*.

(⁵) Hahn, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXXIX, p. 57.

composé, sauf le mélange d'acide nitrique et fluorhydrique qui le dissout complètement.

» Les alcalis fondus, les carbonates ou le mélange de nitrate et de carbonate alcalins l'attaquent facilement.

» *Conclusions.* — L'emploi du siliciure de cuivre comme dissolvant du siliciure de fer nous a permis de préparer le composé SiFe très bien cristallisé.

» Nous avons constaté que le siliciure de cuivre à haute température était dissociable ou susceptible de céder son silicium à un métal tel que le fer, présentant vraisemblablement plus d'affinité que lui pour le silicium. Cette réaction peut être appliquée à la préparation d'autres siliciures métalliques, et nous avons en effet vérifié ce fait pour quelques-uns d'entre eux, notamment pour les siliciures de cobalt, de nickel et de chrome.

» L'emploi de l'arséniure et de l'antimoniure de cuivre nous a conduit à des résultats comparables et nous a fourni ainsi un nouveau moyen de continuer l'étude de ces composés binaires. »

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la préparation et les propriétés d'un sous-phosphure de cuivre cristallisé* [1]. Note de M. **Georges Maronneau**, présentée par M. Henri Moissan.

« Dans une Note sur le phosphure de calcium [2], M. Moissan vient de démontrer que par réduction du phosphate de calcium par le charbon, au four électrique, on pouvait obtenir le phosphure cristallisé P^2Ca^3. Nous avons étendu la même réaction à d'autres phosphates et nous avons entrepris quelques recherches en vue d'étudier la stabilité des phosphures métalliques à la haute température du four électrique.

» Nos premiers essais ont porté sur les composés du cuivre. Nous avons cherché à préparer un phosphure de cuivre en réduisant le phosphate de cuivre par le charbon dans le four électrique de M. Moissan.

» Nous avons, pour cela, chauffé au four électrique un mélange : de phosphate de cuivre, 400 parties; coke de pétrole, 100 parties; préalablement comprimé et séché au four Perrot.

» Nous avons obtenu après chaque opération un culot métallique bien fondu, assez

---

(1) Ce travail a été fait au laboratoire des Hautes Études de M. Moissan.

(2) Henri Moissan, *Préparation et propriétés du phosphure de calcium cristallisé* (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 787).

dur, ayant une cassure cristalline et dont la couleur varie, suivant la durée de la chauffe, du gris blanc au gris bleu. En examinant le culot on constate qu'il est formé de cristaux de phosphure enchâssés dans du cuivre métallique.

» Ce phosphure est évidemment le composé de phosphore et de cuivre le plus stable à cette température élevée; aussi avons-nous tout d'abord cherché à l'isoler.

» Les culots métalliques que nous avons obtenus en réduisant le phosphate de cuivre par le charbon au four électrique ont une composition variable suivant la durée de la chauffe.

» Le courant employé dans nos expériences a été de 900 ampères sous 45 volts.

» La teneur en phosphore et en cuivre a été pour les composés obtenus :

Durée de la chauffe.	Cuivre.		Phosphore.		
	I.	II.	I.	II.	Insoluble [1].
3 minutes....	89,19	89,39	6,71	6,57	»
3 »	90,32	90,58	8,53	8,54	»
5 »	93,37	93,40	3,80	3,74	»

» Pour isoler les cristaux de phosphure contenus dans la masse fondue nous avons pensé à nous servir de la méthode électrolytique qui est souvent employée dans ce genre de recherches.

» Le dispositif se compose de deux piles de Daniell et d'une cuve électrolytique remplie d'une solution de sulfate de cuivre saturée à froid; le pôle positif est constitué par une lame de platine et le pôle négatif par un fil de platine auquel est suspendu le corps à électrolyser.

» Après un certain temps, il se dépose une poudre cristalline qui est recueillie sur un filtre, lavée à l'eau distillée, à l'alcool, puis à l'éther, enfin séchée.

» L'analyse nous ayant démontré la présence du graphite, pour séparer cette variété de carbone, nous avons traité la poudre cristalline par le bromoforme, puis nous l'avons de nouveau lavée à l'éther et séchée.

» Les cristaux nous ont donné à l'analyse : cuivre 80,55 et phosphore 18,40.

» Ce phosphure étant relativement facile à isoler, nous avons pensé à rechercher s'il n'existait pas dans le phosphure du commerce.

» Le phosphure mis en expérience contenait :

	I.	II.
Cuivre..................	87,77	88,25
Phosphore..............	10,65	10,69
Silice....................	65	59
Fer......................	34	37

» Nous l'avons soumis à l'électrolyse en employant le même dispositif que précédemment.

---

[1] La partie insoluble est formée de graphite.

» Les cristaux recueillis ont fourni à l'analyse :

	I.	II.	Théorie pour Cu^2P.
Cuivre	80,53	79,12	80,38
Phosphore	18,62	19,03	19,62

» Ces cristaux sont identiques à ceux que nous avons obtenus en partant du phosphate de cuivre et du charbon; ils renferment une petite quantité de siliciure de fer.

» Cette poudre cristalline est peu métallique, et il est très difficile de caractériser les cristaux; on distingue cependant quelques prismes à contours très nets.

» Sa composition correspond à la formule Cu^2P.

» Ce composé avait été précédemment étudié par Schrötter (1) et Hwosleff (2) qui le préparaient en faisant agir des vapeurs de phosphore sur le cuivre à la température du rouge faible; Casoria (3) obtint, plus tard, le même composé en chauffant du phosphore avec de l'eau et faisant passer les vapeurs dans une solution soit de chlorure cuivreux, soit d'azotate cuivrique; le produit obtenu se présentait sous l'aspect d'une poudre noire qui, à chaud, fond en globules métalliques rougeâtres à l'abri de l'air.

» Plus récemment M. Granger (4), dans une étude importante des phosphures métalliques, a repris les expériences de Schrötter et Hwosleff en apportant des modifications au mode opératoire,

» Le corps qu'il a obtenu est gris, à cassure cristalline, doué de l'éclat métallique; il est très altérable par la chaleur; chauffé, il se décompose en perdant du phosphore; au rouge vif, il se décompose en un phosphure Cu^3P; l'air humide l'altère; chauffé au contact de l'air, il s'oxyde; les oxydants l'attaquent rapidement.

» *Propriétés du composé* Cu^2P. — Sa densité est de 6,4. Chauffé dans un courant d'hydrogène à la température de 1000°, ce phosphure perd une petite quantité de phosphore, il prend alors l'aspect d'une poudre gris fer.

» Le fluor l'attaque à la température ordinaire avec incandescence; il se dégage du fluorure de phosphore et il se forme du fluorure cuivrique fondu blanc, identique, comme aspect, au fluorure cuivrique fondu préparé par M. Poulenc (5).

---

(1) Schrötter, *Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften in Wien*, t. II, p. 304.

(2) Hwosleff, *Liebigs Annalen*, t. C, p. 100.

(3) Casoria, *Berichte der d. chem. Gesellschaft*, t. XXIV, p. 144.

(4) Granger, *Comptes rendus*, t. CXIII, p. 1041. — *Bulletin de la Société chim. de Paris*, 3e série, t. CXI et CXVII, p. 231.

(5) C. Poulenc, *Ann. de Phys. et de Chim.*, 7e série, t. II.

» Avec le chlore, le brome et l'iode à froid pas de réaction apparente; à chaud l'iode l'attaque, sans incandescence, au-dessous du rouge sombre, en donnant de l'iodure de phosphore et un phosphure.

» Chauffé légèrement dans l'oxygène, il s'oxyde. A la température de fusion du soufre, il y a une réaction avec incandescence et formation de sulfure de cuivre.

» Les acides l'attaquent difficilement à froid, sauf l'acide nitrique. A chaud, il est entièrement soluble dans l'acide nitrique, l'eau régale et l'acide fluorhydrique mélangé d'acide azotique; l'acide chlorhydrique l'attaque lentement. Il en est de même pour l'acide sulfurique qui fournit un dégagement d'acide sulfureux et un dépôt de soufre. L'acide acétique et l'acide fluorhydrique ne l'attaquent ni à froid, ni à chaud.

» *Conclusions*. — En résumé, on peut obtenir, par la réduction du phosphate de cuivre par le charbon au four électrique, un phosphure de cuivre cristallisé de formule Cu^2P. »

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur les propriétés thermiques de la chaux préparée à différentes températures*. Note de M. **Henri Gautier**, présentée par M. H. Moissan [1].

« La vitesse d'hydratation de la chaux vive varie considérablement avec les conditions de température dans lesquelles elle a été obtenue. Tandis que, préparée à 1000° et projetée dans une grande masse d'eau, elle produit au contact de ce liquide un léger bruissement avec vaporisation d'une petite quantité d'eau à la surface, elle se dissout sans bruit si elle a été obtenue à 1300° et n'est plus attaquée qu'avec une extrême lenteur si elle a été fondue au four électrique, à tel point que M. Moissan a pu prendre sa densité au contact de l'eau [2] et arriver ainsi sensiblement au même nombre qu'en employant l'essence de térébenthine comme intermédiaire.

» Il était intéressant de rechercher si ces différences dans la vitesse d'hydratation n'étaient pas dues à une différence dans l'état moléculaire de la chaux obtenue à diverses températures, différences qui devraient se traduire par une variation de la chaleur dégagée au moment de la dissolution de la chaux soit dans l'eau pure soit dans l'eau acidulée.

» Toutes les expériences qui suivent ont été effectuées sur de la chaux pure, obtenue par calcination de fragments de spath d'Islande tout à fait

(1) Laboratoire des Hautes Études de M. Moissan.
(2) Moissan, *Le four électrique*, p. 32.

incolores. Ce spath ne renfermait ni fer, ni silice, ni alumine et sa pureté a, de plus, été vérifiée par la diminution de poids qu'il éprouve à la calcination.

» Au moyen de ce spath on a préparé quatre échantillons de chaux à des températures différentes. D'abord vers 1000°, en les calcinant dans un moufle chauffé de telle sorte que l'argent puisse y fondre, tandis qu'une petite barre de cuivre y restait solide. Puis vers 1200° à 1300°, en chauffant le spath par petites quantités dans un creuset de platine, sur une lampe d'émailleur. Un troisième échantillon a été préparé en chauffant pendant vingt minutes, au chalumeau oxhydrique, des morceaux de spath préalablement calcinés au chalumeau ordinaire et disposés sur des fragments de chaux ou marbre.

» Le quatrième échantillon était de la chaux fondue au four électrique en opérant de la façon suivante : Au fond de la cavité ordinaire du four on a placé une certaine quantité de marbre blanc que l'on a soumis à l'action de l'arc ; le spath d'Islande a été disposé sur ce lit de chaux fondue, on l'a fait fondre à son tour et l'on n'a employé, pour les expériences calorimétriques, que la partie de cette chaux fondue la plus éloignée de celle qui formait le fond primitif du four. Il était indispensable de s'assurer que cette chaux fondue ne renfermait ni carbure ni azoture de calcium susceptibles d'amener des variations notables dans la chaleur de dissolution de la chaux. Cette chaux fondue et pulvérisée a donc été mise en présence d'une petite quantité d'eau puis d'un peu d'acide chlorhydrique : il n'y a pas eu trace de dégagement gazeux et la solution traitée par le réactif de Nessler n'a pas donné la moindre coloration.

» En raison de la lenteur avec laquelle s'hydrate la chaux fondue, la détermination directe de la chaleur d'hydratation de la chaux ne peut être obtenue facilement dans une expérience calorimétrique et nous avons préféré déterminer la chaleur de dissolution des quatre échantillons dans de l'acide chlorhydrique étendu de même concentration pour chacun d'eux.

» L'acide à 1 molécule dans 2^{lit} que l'on emploie généralement dans ces expériences calorimétriques étant un peu trop étendu pour dissoudre en cinq à six minutes la chaux fondue, nous avons adopté dans ces expériences de l'acide renfermant 50^{gr} d'acide réel dans un litre d'eau. Cet acide est un peu concentré pour la chaux cuite à 1000°, car au moment où on la projette dans le liquide il se produit une légère vaporisation d'eau qui amènerait une cause d'erreur, mais la difficulté est facile à tourner. Il suffit d'enfermer la chaux dans un petit tube de platine comme celui décrit par M. Moissan [1] dans ses recherches sur la calorimétrie du calcium ; la chaux est immédiatement entraînée au fond du calorimètre, il n'y a plus à craindre de perte de chaleur par vaporisation et l'attaque se fait très régulièrement.

» Toutes ces expériences ont été effectuées au moyen du calorimètre et par les méthodes de M. Berthelot. Le calorimètre était rempli de 500^{cc} d'acide chlorhydrique dilué, la chaux était employée sous un poids d'environ 2^{gr} et sa pureté était constatée

---

[1] Moissan, *Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 385.

à chaque expérience par un essai acidimétrique du liquide restant dans le calorimètre. Nous avons ainsi obtenu les résultats suivants :

	I.	II.	III.	Moyennes.
Chaux cuite à 1000°.....	46,58 Cal	46,44 Cal	46,40 Cal	46,47 Cal
» » 1200.....	46,32	46,40	46,48	46,40
» » 2000.....	46,60	46,40	46,52	46,51
» fondue.........	46,54	46,58	46,50	46,54

» Les valeurs absolues de chacun de ces chiffres doivent être diminuées de 0^{Cal}, 36 d'après les Tables de M. Berthelot pour tenir compte de la concentration de l'acide, mais il n'en reste pas moins établi que la chaleur de formation de la chaux à partir de ses éléments est la même, que l'on considère la chaux telle qu'elle est obtenue à 1000°, fondue ou aux températures intermédiaires. C'est là un fait qui peut être rapproché de celui qui a été cité par M. Berthelot [1] pour la chaleur de formation de la magnésie qui est la même, que cet oxyde soit obtenu à 440° ou au rouge vif. »

OPTIQUE. — *Actino-photomètre fondé sur des relations entre l'éclat du sulfure de zinc phosphorescent et l'intensité ou la nature des sources excitatrices* [2]. Note de M. **Charles Henry.**

« Un bon actinomètre pour la Photographie doit : 1° mesurer toutes les radiations qui réduisent le gélatinobromure d'argent, et celles-là seulement; 2° donner des indications aussi parallèles que possible à celles de la plaque photographique.

» Ces deux conditions sont remarquablement remplies par mon sulfure de zinc phosphorescent : 1° il est excité par toutes les radiations qui réduisent le gélatinobromure; 2° à un éclairage donné, pour des durées très faibles d'exposition, il ne s'illumine pas; aux éclairages très forts, de même que les négatifs deviennent des positifs, il diminue d'éclat. J'ai constaté en 1895 que, à des distances inférieures à 7^{cm} du ruban de magnésium, le sulfure ne se sature plus. Il faut rapprocher de ce fait les observations récentes de Gustave Le Bon sur l'illumination du sulfure de zinc, plus grande à l'ombre qu'au soleil. La cause de ces phénomènes est sans doute l'absorption assez rapide des rayons obscurs extincteurs, par les particules de charbon (la magnésie est aussi très absorbante) en suspension dans l'atmosphère. Ce qui confirme encore cette interprétation est l'impossibilité d'avoir, d'une série d'expériences à l'autre, des

(1) Berthelot, *Thermochimie*, t. II, p. 257.

(2) Travail du laboratoire de Physiologie des sensations, à la Sorbonne.

résultats suffisamment concordants, quand l'on veut relier l'éclat du sulfure à la quantité de lumière émise par le magnésium. D'ailleurs la relation entre l'éclat du sulfure i et l'éclairement du magnésium J paraît devoir être de la forme $i = \frac{bJ^{f(i)}}{c + J^m}$ (b, c, m constantes) qui ne se prête pas au calcul.

» L'actino-photomètre que j'ai fait construire par M. Léon Gaumont consiste essentiellement en une série d'écrans circulaires mi-translucides, mi-phosphorescents; après exposition du sulfure à la source étudiée, on introduit l'écran au bout d'un tube et on l'emboîte en face d'un verre dépoli que l'on peut rendre plus ou moins lumineux par l'addition de verres absorbants et qui est éclairé par une bougie placée dans l'axe d'une lanterne cylindrique. Connaissant les temps différents au bout desquels l'écran de sulfure atteint un certain éclat mesuré par l'écran translucide, il suffit de prendre, sur la courbe de déperdition normale du sulfure de zinc [1], les ordonnées correspondant à ces temps : les éclats varient en raison inverse de ces ordonnées.

» Ayant exposé l'écran phosphorescent à des distances différentes d'une lampe à arc à courants continus de 160 carcels, nous avons cherché les temps nécessaires à la saturation du sulfure pour ces divers éclairements, dans les limites de 2 à 50 carcels-mètre. Ces temps $\mathfrak{T}$ en secondes sont reliés à l'éclairement $\mathfrak{J}$ en carcels-mètre par la relation très simple $\mathfrak{T} = \frac{K}{\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}}}$ (K = 120). Cette relation ne se vérifierait plus évidemment aux intensités très fortes; mais, dans ce cas, elle est inutile. Supposons qu'on expose à l'éclairement du ciel qu'il s'agit de mesurer les écrans tous à la fois et pendant des temps différents et qu'on en mesure les éclats, il est aisé de préciser le temps nécessaire et suffisant à la saturation et d'en tirer $\mathfrak{J}$. Si l'on connaît, pour une certaine marque de plaques photographiques, le nombre de bougies-mètre-secondes ou de phots nécessaire pour amener le négatif à la période de représentation correcte [2], période caractérisée par ceci que les opacités (facilement mesurables à l'actino-photomètre) sont proportionnelles aux illuminations, on déduit facilement de $\mathfrak{J}$ le temps de pose nécessaire.

» Nous avons cherché la relation qui existe entre les éclats i du sulfure et les durées t d'illumination par la source précitée. Ces éclats, dans les limites de 1 à 10 carcels-mètre et pour des durées supérieures à dix secondes, sont bien représentés par l'équation $i = \frac{K}{(\mathfrak{T} - t)^2}$ (K = 25400, i étant des nombres proportionnels aux ordonnées de la courbe, $\mathfrak{T}$ étant les temps nécessaires à la saturation).

(1) *Comptes rendus*, 10 octobre, 24 octobre, 14 novembre 1892; 16 janvier 1893. *La Lumière électrique*, 1893.

(2) Hurter et Driffield, *Journal of the Soc. of chem. Industry*, 31 mai 1890.

» L'actino-photomètre peut encore donner des renseignements précieux sur la nature des sources excitatrices.

» M. J.-R. Mourelo (*Comptes rendus*, 27 février 1899) fait observer que le sulfure de strontium diminue d'impressionnabilité après expositions successives au soleil [1]. C'est là un fait que nous avons constaté depuis longtemps général pour le sulfure de zinc quand, redevenu obscur, il est exposé, à de courts intervalles de temps, à des sources discontinues ou inconstantes; très considérable quand ce sulfure est exposé plusieurs fois de suite à une lampe à arc à courants alternatifs, moins accusée avec la lampe à arc à courants continus, la diminution de l'éclat de saturation se vérifie encore avec la lumière diffuse; elle est presque nulle avec le ruban de magnésium. La loi de déperdition lumineuse est également plus rapide quand, dans les premiers instants de son émission, le sulfure est réexcité une ou plusieurs fois de suite. Par exemple, si, après exposition à la lumière diffuse, on applique sur un écran de sulfure de zinc une cache métallique, et qu'on excite au ruban de magnésium la portion découverte, celle-ci, qui, dans les premiers instants après l'illumination, est plus lumineuse, devient bientôt moins lumineuse que la partie réservée. Le fait ne se produit pas quand on intervertit l'ordre des sources excitatrices, sans doute à cause de la moindre proportion de rayons extincteurs que présente la lumière diffuse. Si l'on opère avec la même source (lumière diffuse ou magnésium), la différence, plus ou moins grande au début entre les deux portions de l'écran, tend à diminuer avec le temps et même à se renverser, pour l'excitation au magnésium, comme dans le cas précédent, quand les illuminations se succèdent à court intervalle.

» Si l'on interpose, entre une source excitatrice et un écran au sulfure de zinc, une cuve de sulfure de carbone, le sulfure est moins lumineux que si l'on interpose une cuve d'alun, ce qui prouve que le sulfure de carbone absorbe plus de radiations que l'alun, contrairement à la supposition qui sert de principe à la mesure du rendement optique des foyers lumineux par la pile thermo-électrique.

» Si, après l'égalisation des intensités au photomètre Foucault, on place devant chacune des deux plages de l'écran de ce photomètre un écran de sulfure saturé, derrière une cuve au bichromate, à des distances suffisantes pour éliminer l'influence des rayons infra-rouges extincteurs, on a un moyen très rapide de comparer, par les différences d'extinction, la richesse relative des deux sources en radiations éclairantes. »

---

[1] M. Mourelo interprète l'illumination du sulfure de strontium à la chaleur, par une transformation de radiations calorifiques en radiations éclairantes : il n'y a là que des émissions plus rapides de luminescences résiduelles. Il interprète des faits d'illumination du sulfure de strontium par lui-même, en admettant une auto-excitabilité : ces phénomènes sont dus probablement à des traces de sulfure de calcium qui, étant violet, excite le sulfure de strontium.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la dextrine considérée comme matière de réserve.* Note de M. **Leclerc du Sablon**, présentée par M. Gaston Bonnier.

« Les matières de réserves proprement dites sont celles qui se trouvent accumulées dans les organes de réserve à l'état de vie ralentie. Dans les tubercules de pomme de terre, et un assez grand nombre d'autres organes de réserve, l'amidon est la principale, quelquefois même la seule substance hydrocarbonée que l'on observe en quantité notable pendant la vie ralentie. De plus, l'amidon étant à l'état de grains est plus facile à observer que la dextrine qui est dissoute dans le suc cellulaire. Pour ces raisons, la dextrine est considérée, par les physiologistes, non comme une substance de réserve, mais seulement comme un composé transitoire produit pendant la consommation des réserves par l'action des diastases sur l'amidon. L'étude de certaines plantes m'a amené à modifier cette conception du rôle de la dextrine.

» Un bulbe de jacinthe, par exemple, considéré à un état quelconque de son développement, renferme toujours une certaine quantité de dextrine et d'amidon, comme le montre le Tableau suivant qui indique les proportions de dextrine et d'amidon rapportées à 100 parties de matière sèche.

	Dextrine pour 100.	Amidon pour 100.
18 janvier	18	5
27 mars	22	16
27 mai	26	29
11 novembre	21	26
10 février	15	4

» En janvier et mars, le bulbe est en voie de formation ; en mai, le bulbe entre en voie de vie ralentie ; en novembre, la consommation des réserves est déjà commencée. L'amidon passe par un maximum au moment de la vie ralentie et se conduit ainsi très nettement comme une substance de réserve. La dextrine est en quantité plus considérable que l'amidon pendant la formation du bulbe ; on peut admettre, en suivant l'opinion classique, que la dextrine sert alors à former l'amidon qui s'emmagasine ; de même, pendant que le bulbe est consommé, de novembre en février, on peut dire que la dextrine qui s'y trouve provient de la digestion de l'amidon. Mais alors,

au mois de mai, lorsque le bulbe entre à l'état de repos, on devrait s'attendre à voir la dextrine disparaître ou tout au moins passer par un minimum; on constate au contraire l'existence d'un maximum. La dextrine existe donc dans les bulbes de jacinthe à l'état de réserve au même titre que l'amidon, mais c'est une réserve moins différenciée.

» D'autres plantes peuvent se prêter à la même démonstration. Les bulbes de tulipe à l'état de vie ralentie renferment 14 pour 100 de dextrine, ceux du lis en contiennent 18 pour 100. Dans ces plantes, comme dans la jacinthe, la dextrine se trouve mêlée à l'amidon. Il n'en est pas de même dans l'asphodèle où il n'y a pas d'amidon mais seulement de la dextrine et du sucre; les tubercules à l'état de repos renferment de 15 à 20 pour 100 de dextrine et quelquefois plus. Dans ce cas on ne peut pas dire que cette matière soit un produit de la digestion de l'amidon; c'est au contraire la forme la plus différenciée de la réserve hydrocarbonée.

» D'autre part, les travaux de MM. Dieck et Tollens sur le topinambour ont montré que l'inuline, substance absolument comparable à la dextrine mais déviant à gauche le plan de polarisation, jouait dans les plantes qui renferment de l'inuline le même rôle que la dextrine dans les plantes qui contiennent de l'amidon. Ainsi, dans les tubercules de topinambour ou de dahlia, la lévuline se trouve, soit à l'état de matière de réserve, soit à l'état de produit de la digestion de l'inuline.

» En somme, la dextrine peut être envisagée comme jouant dans les plantes plusieurs rôles différents : 1° dans les organes de réserve en voie de formation, c'est une substance servant à former l'amidon; 2° pendant que les réserves sont digérées, c'est un produit de la décomposition de l'amidon; 3° pendant la période de vie ralentie, c'est une réserve proprement dite que l'on peut considérer comme indépendante de l'amidon. »

ANATOMIE VÉGÉTALE. — *Sur quelques particularités anatomiques nouvelles dans les graines grasses* (*cotylédons et endosperme*). Note de M. **Edouard Heckel**, présentée par M. Gaston Bonnier.

« Dans le cours de mes recherches sur les graines grasses inconnues ou peu connues de nos Colonies françaises, j'ai pu relever quelques particularités anatomiques nouvelles, qui m'ont paru présenter un intérêt de nouveauté et mériter partant d'être signalées. Le fait le plus intéressant est

fourni par la présence de *poches sécrétrices* dans les cotylédons, la gemmule et la tigelle de la *Pongamia glabra* Ventenat.

» Les graines réniformes et bombées sont pourvues de deux cotylédons gras qui présentent, en coupe transversale (perpendiculaire au grand axe de la graine), sur le fond jaunâtre de la masse cotylédonaire et visibles à l'œil nu, d'assez fortes ponctuations remarquables par leur coloration jaune plus foncée. Les plus gros de ces organes sont rassemblés en une ligne le long des bords cotylédonaires, peu au-dessous de l'épiderme; à mesure qu'on s'avance vers la partie centrale ces ponctuations deviennent plus petites, mais elles sont toujours nombreuses. A l'examen microscopique d'une coupe, on trouve des cellules à parois assez épaisses, contenant beaucoup d'amidon à petits grains sphériques ou ovalaires avec hile ponctiforme. Accolées aux parois internes, on voit des sphérules ou des traînées d'huile contenant de l'aleurone avec petits cristaux. Quelques-unes des cellules de ce parenchyme, plus petites que les autres, allongées et étroites, renferment avec de l'amidon et de l'huile, de gros cristaux d'oxalate de chaux revêtant des formes diverses. Tantôt ils sont en prismes isolés ou terminés par d'autres prismes perpendiculaires aux premiers, transversaux et plus courts; ils vont, comme un étai, de la paroi la plus étroite de la cellule à celle de même dimension qui lui fait face et remplissent presque entièrement la cellule; tantôt ce sont de petites macles, tantôt enfin des prismes plus courts occupant seulement une partie restreinte de la cellule. La même disposition se retrouve dans la gemmule et la tigelle.

» C'est dans la masse de ce parenchyme gras que se trouvent, très rapprochées les unes des autres (dans les cotylédons surtout), les *poches sécrétrices à contenu huileux*. Grandes ou petites, à coupe circonférencielle ou ovalaire, et se fondant quelquefois deux à deux pour en former une plus grande, ces poches sont bordées de cellules aplaties très différentes de leurs voisines dans le parenchyme, quelquefois prolongées en papille dans l'intérieur de la poche et portant souvent trace sur leurs bords de débris de parois cellulaires qui indiquent leur origine léissogène. Ces poches ne renferment pas d'amidon comme les cellules du parenchyme, elles sont remplies uniquement par une masse homogène et jaune d'huile fixe liquide semblable à celle qui est contenue dans les cellules du parenchyme cotylédonaire.

» Ces organes n'ont jamais été signalés jusqu'ici, à ma connaissance, dans les graines des Légumineuses : on les a constatés dans l'embryon des *Diptérocarpées* et des *Guttifères*, mais là, leur contenu est d'une structure tout autre et plus complexe. Ici, ce sont de véritables citernes à huile fixe.

» En dehors de ces faits, je dois encore signaler la présence, dans un certain nombre d'endospermes gras (à huiles concrètes) propres à des graines de familles très différentes (*Myristicacées, Bixacées*), de *cellules à bandes réticulées* rappelant la condition de celles de l'assise mécanique des

anthères ou mieux encore de celles du thalle de *Marchantia polymorpha*. J'ai jusqu'ici relevé leur existence dans l'*Ochocoa Gaboni* Pierre (*Scyphocephalium Ochocoa* Warburg), la *Virola Micheli* Heckel (¹), enfin l'*Hydnocarpus anthelmintica* Pierre. Les deux premières espèces sont des Myristicacées du Gabon (*Ochocoa Gaboni*) et de la Guyane française (*Virola Micheli*), la dernière est une Bixacée de la Cochinchine française.

» Dans ces diverses graines, les cellules à bandes réticulées forment un réseau complet plus ou moins anastomosé mais entourant la cellule entière. Dans l'*Ochocoa Gaboni*, ces cellules semblent localisées à la périphérie de l'endosperme blanc de consistance stéarique; les bandes sont larges, en petit nombre et peu divisées, mais très lignifiées. Dans l'*Hydnocarpus anthelmintica*, elles occupent tout l'endosperme et sont pourvues de bandes plus étroites, mais peu divisées; enfin, dans la *Virola Micheli* elles forment également la totalité de l'endosperme et sont à bandes très fines, très nombreuses, très divisées, s'anastomosant les unes dans les autres. Cette condition anatomique est propre à certaines espèces et ne se retrouve pas du tout dans d'autres espèces très voisines de celles qui la présentent : c'est ainsi que je ne l'ai pas constatée dans l'*Hydnocarpus Wightiana* Blume, de l'Inde, et qu'elle n'existe pas non plus dans la *Virola sebifera* Aublet, plante très rapprochée spécifiquement et géographiquement de la *Virola Micheli* qui vit à ses côtés dans les mêmes régions (Saint-Laurent-du-Maroni) de notre Guyane.

» Il faut encore remarquer que, dans les endospermes pourvus de cellules réticulées, je n'ai trouvé jamais, dans la même cellule, simultanément, de l'amidon et des corps gras solides ou liquides *quand la graine est arrivée à maturité*, comme cela se produit dans un grand nombre de graines grasses exotiques qui renferment en même temps ces deux formes des réserves hydrocarbonées. Cependant, avant la maturité de la graine, j'ai trouvé de l'amidon dans les cellules qui doivent devenir réticulées, mais il disparaît de bonne heure à mesure que les bandes lignifiées se forment. Le même fait, du reste, a été observé dans la genèse des assises mécaniques de l'anthère depuis longtemps. »

(¹) Cette espèce nouvelle est décrite dans le fascicule sous presse des *Annales de l'Institut colonial de Marseille*, 1899, consacré à mes *Recherches sur les graines grasses nouvelles ou peu connues des Colonies françaises*.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur un halo extraordinaire observé, à Paris, le 5 avril 1899.* Note de M. **Joseph Jaubert**, présentée par M. J. Violle.

« Dans la matinée du 5 avril, un halo tout à fait exceptionnel par sa complexité et par l'éclat de ses colorations a été visible à Paris. A l'observatoire municipal de Montsouris, ce phénomène a pu être observé d'une façon complète par nos collaborateurs MM. Besson et Dutheil, qui ont assisté au début de l'apparition et en ont noté avec soin les phases successives. Il paraîtra, sans doute, intéressant de rapporter cette observation avec quelque détail.

» $10^h 50^m$. — La partie supérieure du cercle de 22° et son arc tangent apparaissent avec une grande vivacité de couleurs dans l'extrémité d'une bande de cirrus qui, venue de la région nord, s'allonge progressivement vers le sud en passant par le zénith.

» Quelques minutes après, le cercle de 22° est complet. L'arc tangent inférieur est également visible.

» $11^h 13^m$. — Le parhélie de droite apparaît, puis la partie occidentale du cercle parhélique se dessine brusquement, comme tracée d'un coup de pinceau rapide. Elle est d'un blanc très pur et bien limitée en largeur.

» Les cirrus s'étendent et forment une nappe composée d'un grand nombre de bandes parallèles; certaines d'entre elles paraissent plus propres que les autres à donner le cercle parhélique. En se déplaçant, elles donnent naissance à divers fragments de ce cercle.

» Le parhélie de gauche se montre. Les deux parhélies sont souvent visibles simultanément, accompagnés du halo de 22° et du halo circonscrit; leur éclat est très variable.

» $11^h 30^m$. — On voit, pendant quelques instants, confusément, mais avec certitude, un arc coloré à 45° du Soleil, non loin du zénith.

» Il est à remarquer que c'est là que le halo de 45° serait touché par l'*arc supralatéral* qui a été prévu par Bravais, mais ne semble pas avoir été observé.

» $11^h 45^m$. — Une sorte de parhélie vivement coloré et surmonté d'une houppe de lumière blanche brille un moment au sommet du cercle de 22°.

» 12^h. — Le cercle parhélique se montre subitement dans sa totalité. Le halo de 22° et le halo circonscrit sont complets et brillants. Les parhélies sont très vivement colorés.

» L'ensemble du phénomène constitue un spectacle d'une grande beauté. Le ciel est alors en majeure partie couvert d'un cirro-stratus presque uniforme.

» $12^h 10^m$. — L'arc infralatéral gauche, qui avait été déjà vaguement soupçonné entre 11^h et 12^h, apparaît nettement, bien que beaucoup plus pâle que les autres courbes lumineuses visibles.

» $12^h 30^m$. — Après une éclipse partielle d'assez longue durée, le cercle parhélique se montre de nouveau au complet; il est d'un blanc particulièrement éclatant dans ses parties nord et surtout ouest. Dans cette dernière région, le blanc semble bordé des deux côtés d'un liséré roux.

» Pendant quelques instants, l'anthélie et les deux paranthélies sont visibles sous la forme de pelottes arrondies sans contours nets. Le cercle parhélique présente de plus un autre nœud de lumière blanche à une faible distance du vertical de l'ouest en allant vers le nord.

» Il y a lieu de penser que ce parhélie appartenait à la classe de ceux qui peuvent se montrer, d'après Bravais, à 98° du Soleil. A ce moment-là, toute la partie nord du ciel était pure. Le cercle parhélique se formait dans l'extrémité postérieure de la nappe de cirrus, composée de filaments très courts et assez espacés, reliés sans doute entre eux par un voile invisible.

» Quelques minutes après, ces nuages s'étant éloignés vers le sud, les phénomènes optiques prirent fin.

» Dans l'après-midi du même jour, à 4^h, on a observé l'arc circumzénithal, sans accompagnement de halos proprement dits, ni de parhélies.

» En ce qui concerne le halo complexe de la matinée, les circonstances météorologiques étaient les suivantes :

» A 12^h, baromètre réduit au niveau de la mer, $771^{mm},6$, en hausse de $2^{mm},4$ sur la veille. Température, 14°,8. Vent nord-nord-ouest : vitesse, $4^m,7$.

» A $11^h 20$, une mesure, faite à la chambre noire néphoscopique, a donné pour les cirrus : direction nord 40° ouest. Rapport de la hauteur en mètres à la vitesse en mètres par seconde : 180, nombre fort petit pour des nuages de cette nature, ce qui implique une vitesse très grande ou une hauteur exceptionnellement faible. Les filaments constitutifs étaient orientés nord 17° ouest.

» La hauteur du Soleil à son passage au méridien, c'est-à-dire à $12^h 3^m$, était de 47°15. »

La séance est levée à 4 heures un quart.

J. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 4 avril 1899.

L'esprit scientifique contemporain, par le Dr Foveau de Courmelles. Paris, Eugène Fasquelle, 1899; 1 vol. in-8°. (Hommage de l'Auteur.)

La Drôme aux anciennes Académies et à l'Institut de France : Alexis Fontaine des Bertins, Membre de l'Académie royale de Paris, 1704-1771, par Étienne Mellier; s. l. n. d., 1 br. in-4°. (Hommage de l'Auteur.)

Théorie de la sexualité, par P.-A. Dangeard. (Extr. de la publication *Le Botaniste.*) Poitiers, s. d.; 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'Auteur.)

Cosmogonie dualiste, par Ad. Alhaiza. Chez l'Auteur, à Montreuil-sous-Bois (Seine); 1 br. in-18. (Hommage de l'Auteur.)

Mesures de la polarisation rotatoire de l'oxygène et d'autres gaz, dans diverses parties du spectre visible, par L.-H. Siertsema. Haarlem, John Enschedé and sons, s. d.; 1 fasc. in-8°.

Autobiographie de Cyrille Tsviétkovitch, publié par Dimitri Rouvaratz. Belgrade, 1898; 1 vol. in-8° (en serbe.)

On the laws of movement of sea-currents and rivers, by A.-W. Cronander. Norrköping, 1898; 1 fasc. in-4°. (Hommage de l'Auteur.)

A manual of the Geology of India : Economic Geology, by the late professor V. Ball. Second edition. Part I : *Corundum,* by T.-H. Holland. Calcutta, 1898; 1 br. in-4°.

Dr J. Verschaffelt : *Measurements on the system of isothermal lines near the plaitpoint.* Eduard Ijdo, Leiden, s, d.; 1 fasc. in-8°.

Dr L.-H. Siertsema : *Measurements on the magnetic rotatory dispersion of gases.* Eduard Ijdo, Leiden, s. d.; 1 fasc. in-8°.

The nautical Almanac and astronomical ephemeris for the year 1902, *for the meridian of the royal observatory at Greenwich.* Edinburg, Neill and Co; 1 vol. in-8°.

Annual report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, schowing the operations, expenditures and condition of the Institution, to July 1896. Washington, 1898; 1 vol. in-8°.

Anatomie. Physiologie. Zoologie. Geschichte der Medizin und verwandte Wissenschaften. Berlin, Speyer und Peters, s. d.; 1 fasc. in-8°.

Catalogo di antiche e rare edizioni. Lucca, Giuseppe Martini, 1899; 1 fasc. in-8°.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo XIII, anno 1899, fasc. I e II. Palermo, tipografia matematica; 1 br. in-8°.

El Instructor, publicacion mensual, scientifica, literaria y de agricultura. Año XV, n° 9, enero de 1899. Aguascalientes, Ricardo Rodriguez Romo; 1 fasc. in-4°.

Technology quarterly and proceedings of the Society of Arts. Vol. XI, n° 4, December 1898. Boston, Massachusetts Institute of Technology; 1 fasc. in-8°.

Memoirs of the geological Survey of India : Paleontologia indica. Ser. XV : *Himalayan fossils*, vol. I, part. 3. *The permocarboniferous fauna of Chitichun;* n° 1, by Carl Diener. Calcutta, 1897; 1 fasc. petit in-f°.

Ouvrages reçus dans la séance du 10 avril 1899.

Cent vingt exercices de Chimie pratique, décrits d'après les textes originaux et les notes de laboratoire et choisis pour former des chimistes, par Armand Gautier, de l'Institut, et J. Albahary. Paris, Masson et Cie, 1899; 1 vol. in-16.

Hérédité d'un caractère acquis chez un Champignon pluricellulaire, par L. Errera. Bruxelles, Hayez, 1899; 1 fasc. in-8°.

Études géologiques sur la Belgique, par M. H. Forir. Liége, 1895-1898; 4 opuscules in-8°.

Notices bibliographiques, par H. Forir. V. Liége, H. Vaillant-Carmanne, 1895; 1 fasc. in-8°.

Comptes rendus des Sessions extraordinaires de la Société géologique de Belgique : du 3 au 6 septembre 1892, par MM. Mourlon, Lohest, Forir; du 5 au 8 septembre 1896, premières journées, par MM. Lohest et Forir; du 2 au 5 octobre 1897, par M. H. Forir; du 17 au 20 septembre 1898, par M. H. Forir.

Notions sommaires de Géologie à l'usage de l'explorateur au Congo, par Max Lohest. Bruxelles, P. Weissenbruch, 1897; 1 fasc. in-8°.

Études géologiques sur la Belgique et le Nord de la France, par M. Max Lohest. Liége-Bruxelles, 1885-96; 20 opuscules in-8°.

Perturbations of the Leonids, by G. Johnstone Stoney and A.-M.-W. Downing. From the *Proceedings* of the Royal Society, vol. LXIV.

Cuckoos and shrikes in their relation to agriculture : The food of cuckoos,

by F.-E.-L. Beal. *The food of skrikes,* by Sylvester D. Judd. Washington, 1898; 1 fasc. in-8°.

Lief zones and crop zones of the United States, by C. Hart Merriam. Washington, 1898; 1 fasc. in-8°.

The geographic distribution of cereals in North America, by C.-S. Plumb. Washington, 1898; 1 fasc. in-8°.

The chinch bug, its probable origin and diffusion, its habits and development... and preventive measures, ... by F.-M. Webster. Washington, 1898; 1 fasc. in-8°.

Sheep scab, its nature and treatment, by D.-E. Salmon and Ch. Wardell Stiles. Washington, 1898; 1 fasc. in-8°.

A digest of metabolism experiments, in which the balance of income and outgo was determined, by W.-O. Atwater and C.-F. Langworthy. Washington, 1897; 1 vol. in-8°.

Bibliography of the more important contributions to american economic entomology. Part VI, by Nathan Banks. Washington, 1898; 1 vol. in-8°.

Portugalia : Materiaes para o estudo do povo portuguez. Tomo I, fasc. 1°. Porto, Ricardo Severo, s. d.; 1 fasc. in-4°.

Science of man and australasian anthropological journal. Vol. II, n° 1. Sydney, 1899; 1 fasc. in-4°.

Académie royale de Belgique : Bulletin de la Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques et de la Classe des Beaux-Arts. 1899, n°s 1 et 2. Bruxelles, Hayez, 1899; 2 fasc. in-8°.

Anales del Instituto y observatorio de Marina de San Fernando. Seccion 2ª : *Observationes meteorologicas y magneticas,* año 1897. San Fernando, 1898; 1 fasc. in-f°.